تحلیل خطای کسینوسهای هادی و کواترنیونها در فرآیند انتشار

سید حسین پورتاکدوست[۱] ، ناصر رئوف[۲] و فرشاد پازوکی[۳]

۱و۳- دانشگاه آزاد اسلامی- واحد علوم و تحقیقات- دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا
۲- گروه صنایع شهید باکری- پژوهشکده شهید اسلامی

چکیده

محاسبه دقیق و انتشار ماتریس دوران در مباحث ناوبری و شبیه سازی وسایل پرنده هوافضایی از اهمیت زیادی برخوردار است. در ایـن مقالـه، تحلیل خطای دو روش متعارف انتشار ماتریس دوران، شامل روش کسینوسهای هادی و کواترنیونها در سیستمهای ناوبری متصل به بدنه[۴] مـورد بررسی قرار گرفته است . در این راستا، ابتدا یک الگوی تحلیل خطا برای مقایسه این دو روش ارائه می‌گردد. بدین منظـور خطاهـای مقیاسـی[۵]، اریب[۶] و انحراف[۷] تعریف و روش محاسبه آنها ارائه می گردد. همچنین نشان داده خواهد شد که کواترنیونها، ذاتاً دارای خطای اریب صفر بـوده و لذا نسبت به کسینوسهای هادی از مزیت بیشتری برخوردار می‌باشند. در انتها نیز روشی برای متعامد کردن ماتریس کـسینوسهای هـادی ارائـه شده است که با استفاده از آن خطاهای مقیاس و اریب این ماتریس از بین می‌رود. در نهایت نیز یک مثال عددی برای پیاده سازی مباحث فوق ارائه گردیده است.

واژه های کلیدی: تحلیل خطا- کسینوسهای هادی- کواترنیونها- خطای مقیاس- خطای اریب- خطای انحراف

Direction Cosines and Quaternion Error Analysis of the Propagation Process

S.H. Pourtakdoust , N. Raoof, and F. Pazooki

1, 3- Mechanical And Aerospace Engineering Department, Science and Research Branch, Islamic Azad University.
2- Bakeri Industrial Group, Eslami Research Center

Abstract

Accurate computation of the rotation matrix and its time propagation is of great importance in the navigation and modeling of aerospace systems. The present study focuses on the error analysis of two conventional approaches for coordinate transformation. Namely the methods of direction cosines as well as the quaternions utilized in typical strapdown navigation systems. In this regard an analytical error model is first developed that allows for comparison between the two methods. For this purpose, the transformation matrix errors such as scale factor, bias and drift are defined and their calculation schemes are detailed out. It is shown that the quternions are naturally with zero bias error that can be considered as an advantage over direction cosines. Consequently a scheme for orthogonalization of the direction cosine matrix is suggested that will null its scale factor and drifts errors. Finally a numerical example is presented to emphasize the results of this study.

Key Words: Error Analysis, Direction Cosines, Quaternion, Scale Factor Error, Bias Error, Drift Errors.

۱ استاد
۲ دستیار پژوهشی: (نویسنده پاسخگو) Naser_Raoof@yahoo.com
۳ استادیار

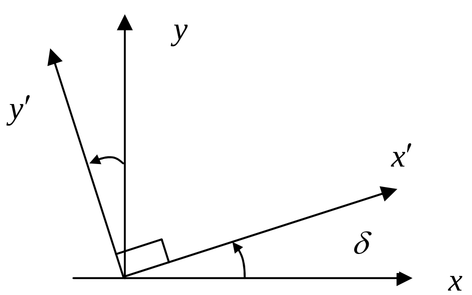
[4] Strapdown
[5] Scale
[6] Skew
[7] Drift

۱- مقدمه

دو روش متعارف حل معادله وضعیت هواپیما کسینوسهای هادی و کواترنیونها می‌باشند. در اغلب سیستمهای ناوبری اینرسی از نوع متصل به بدنه، کواترنیونها (پارامترهای اویلر) با نرخ سریع به روز می‌شوند و سپس ماتریس کسینوسهای هادی که ترکیبی از کواترنیونها هستند با نرخ آهسته تری محاسبه می‌شوند. فایده اصلی این کار آن است که زمان محاسبه در کامپیوتر پرواز کاهش یافته، دقت بیشتر شده و از رخداد مسئله تکین جلوگیری می‌شود[۵]. محاسبه یک ماتریس دوران متعامد با انتگرالگیری عددی از معادله دیفرانسیل ماتریس دوران(و یا معادله کواترنیونها) باعث ایجاد سه نوع خطا به نام خطای مقیاس، خطای اریب و خطای انحراف می‌شود[۱]. بررسی و تخمین این خطاها به منظور انتخاب یک الگوریتم مناسب برای تعیین وضعیت هواپیما بسیار مهم می‌باشد. به منظور درک بهتر خطاهای فوق با یک مثال دو بعدی شروع می‌کنیم. شکلهای (۱) و (۲) را در نظر بگیرید. در هر دو شکل، محورهای x و y دقیقاً بر هم عمود می‌باشند. در شکل (۱) دستگاه مختصات $x'y'$ به اندازه زاویه δ نسبت به دستگاه xy چرخیده است. محورهای x' و y' همچنان بر هم عمودند ولی در راستای محورهای x و y نمی‌باشند. این خطا به نام خطای انحراف شناخته می‌شود[۶].

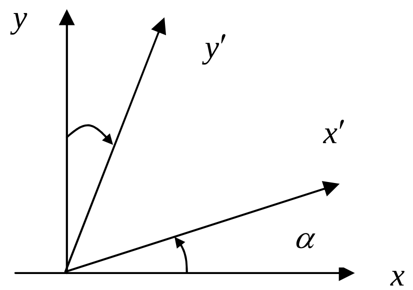
در شکل(۲) هر دو محور x' و y' نسبت به محورهای x و y در جهت مخالف و به اندازه زاویه α چرخیده‌اند. در این حالت، محورهای x' و y' اضلاع یک متوازی الاضلاع را تشکیل می‌دهند و محورهای x' و y' نسبت به حالت قائم مقداری انحراف دارند که به نام خطای اریب شناخته می‌شود. با دوران تنها محور y' می‌توان شکل **۲** را مشابه شکل **۱** ساخت و این بدان معنی است که می‌توان خطای اریب را با تبدیل به خطای انحراف از بین برد. البته مزیتی در انجام این کار نیست مگر اینکه بتوان واقعاً خطای اریب را بدون تبدیل آن به خطای دریفت از بین برد [۶ و ۷] علاوه بر خطاهای اریب و انحراف که در بالا توضیح داده شد، انحراف[1] دستگاه مختصات باعث ایجاد خطای دیگری به نام خطای مقیاس نیز می‌شود. فرض کنید محورهای x' و y' بر محورهای x و y منطبق باشند، خطای مقیاس زمانی بوجود می‌آید که بردارهای یکه که در دستگاه مرجع (xy) دارای طول واحد بودند در دستگاه جدید ($x'y'$) دارای طول واحد نباشند. به عبارتی دیگر، بردارهای پایه در دستگاه $x'y'$ به طور دقیق نرمالایز نشده باشند.

هدف مقاله حاضر مطالعه مطالب فوق در سه بعد و تحلیل خطاهای مقیاس، اریب و انحراف مربوط به کسینوسهای هادی و کواترنیونها و نیز کاهش و یا حذف این خطاها می‌باشد. در این مقاله همچنین روابط مناسبی برای استخراج خطاهای فوق ارائه می شود.



شکل (۱): دوران محورهای مختصات به اندازه زاویه δ

[1] Distortion



شکل (۲): دوران محورهای مختصات به اندازه زاویه α

۲- روش کسینوسهای هادی

یکی از روشهای متعارف برای به روز کردن[1] ماتریس دوران در سیستمهای SINS[2] انتگرالگیری از معادله دیفرانسیل ماتریس دوران است{۱}, بنابراین:

$$\dot{C} = C\Omega \quad (۱)$$

که C ماتریس کسینوسهای هادی می‌باشد که یک بردار را از دستگاه بدنی به دستگاه مرجع انتقال می‌دهد و Ω

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

ماتریس پادمتقارن[3] است که به صورت زیر تعریف می‌شود:
در این رابطه $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ خروجیهای ژیروسکوپها و معلوم می‌باشند. در صورتیکه جهت بردار سرعت زاویه‌ای در یک سیکل زمانی از t_k تا t_{k+1} ثابت باشد، حل معادله (۱) به صورت زیر خواهد بود[۱].

$$C_{k+1} = C_k \exp \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega(t)dt \quad (۳)$$

با بسط تابع نمایی فوق، می‌توان این رابطه را به صورت زیر نوشت[۲].

$$C_{k+1} = C_k\left[I + \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}[\Delta\vec{\varphi}\times] + \frac{(1-\cos\Delta\varphi)}{\Delta\varphi^2}[\Delta\vec{\varphi}\times]^2\right] \quad (۴)$$

که $\Delta\varphi$ اندازه بردار دوران در بازه زمانی مورد نظر است که میتوان آن را بصورت زیر نوشت:

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_x^2 + \Delta\varphi_y^2 + \Delta\varphi_z^2)^{0.5} \quad (۵)$$

و $[\Delta\vec{\varphi}\times]$ ماتریس پاد متقارن است که آرایه‌های آن مولفه-های بردار دوران می‌باشداین ماتریس عبارت است از:

$$[\Delta\vec{\varphi}\times] = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\varphi_z & \Delta\varphi_y \\ \Delta\varphi_z & 0 & -\Delta\varphi_x \\ -\Delta\varphi_y & \Delta\varphi_x & 0 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

باید توجه داشت که حل عددی رابطه (۴) با فرض ثابت بودن جهت بردار سرعت زاویه‌ای در طول بازه انتگرالگیری بدست آمده است.

۳- روش کواترنیونها

کواترنیونها (پارامترهای اویلر[4]) دارای ۴ المان بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \quad (۷)$$

به طوریکه ملاحظه می‌شود، کواترنیونها به صورت اعداد مختلط نوشته می‌شوند. بردارهای پایه در رابطه (۷) از قوانین زیر تبعیت می‌کنند:

[1] Update
[2] Strap down Inertial Navigation System
[3] Skew Symmetric
[4] Euler Parameters

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned} \qquad (۸)$$

کواترنیون فوق دارای اندازه q_0 به صورت زیر می‌باشد:

$$q_0 = \left(\sum_{i=1}^{4} q_i^2 \right)^{0.5} \qquad (۹)$$

اگر q نشان دهنده جهت‌گیری محورهای بدنی نسبت به محورهای مرجع باشد، آنگاه یک بردار را می‌توان طبق رابطه زیر از دستگاه بدنی به دستگاه مرجع انتقال داد[۲].

$$\vec{r}^{\,i} = q\vec{r}^{\,b}q^{-1} \qquad (۱۰)$$

معادل رابطه فوق در شکل ماتریس دوران به صورت زیر می‌باشد:

$$r^i = C_b^r r^b \qquad (۱۱)$$

در روابط فوق، $\vec{r}^{\,i}$ و $\vec{r}^{\,b}$ به ترتیب نشان دهنده بردارهایی هستند که مؤلفه‌های آنها (r^i و r^b) در دستگاه مرجع و بدنی بیان شده است. در صورتیکه $q_0 = 1$ باشد آنگاه $q^{-1} = q^*$ لذا:

$$\vec{r}^{\,i} = q\vec{r}^{\,b}q^* \qquad (۱۲)$$

که q^* مزدوج[۱] q می‌باشد[۲].

$$q^* = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k \qquad (۱۳)$$

با بسط روابط (۱۱) و (۱۲) و مقایسه آنها می‌توان C_b^r را بر حسب پارامترهای اویلر به صورت زیر نوشت:

$$C_b^r = \begin{bmatrix} q_1^2+q_2^2-q_3^2-q_4^2 & 2(q_2q_3-q_1q_4) & 2(q_2q_4+q_1q_3) \\ 2(q_2q_3+q_1q_4) & q_1^2-q_2^2+q_3^2-q_4^2 & 2(q_3q_4-q_1q_2) \\ 2(q_2q_4-q_1q_3) & 2(q_3q_4+q_1q_2) & q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

[۱] Conjugate

می‌دانیم که اگر C_1^2 ماتریس دوران دستگاه ۱ به ۲ و C_2^3 ماتریس دوران دستگاه ۲ به ۳ باشد آنگاه ماتریس دوران از دستگاه ۱ به ۳ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$C_1^3 = C_2^3 C_1^2 \qquad (۱۵)$$

معادل رابطه فوق برای کواترنیونها به شکل زیر می‌باشد:

$$\underset{13}{q} = \underset{23}{q}\,\underset{12}{q} \qquad (۱۶)$$

با استفاده از رابطه فوق می‌توان $\underset{23}{q}$ را به شکل زیر بدست آورد:

$$\underset{23}{q} = \underset{13}{q}\,\underset{12}{q}^{-1} = \underset{13}{q}\,\underset{12}{q}^{*} \qquad (۱۷)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} w \quad q \qquad (۱۸)$$

معادل رابطه (۱) برای کواترنیونها به صورت زیر می‌باشد[۱].

در این رابطه:

$$w = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

با در نظر گرفتن همان فرضیات قبل، حل عددی رابطه فوق به صورت زیر می‌باشد[۳].

$$q_{k+1} = [\exp\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} w(t)dt]q_k \qquad (۲۰)$$

با بسط رابطه فوق خواهیم داشت[۳].

$$q_{k+1} = [Q]r_k \qquad (۲۱)$$

که

$$[Q] = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

و

$$r_k = \left[\cos(\frac{\Delta\varphi}{2}) \quad \frac{\Delta\varphi_x \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi} \quad \frac{\Delta\varphi_y \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi} \quad \frac{\Delta\varphi_z \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi}\right]^T \qquad (۲۳)$$

۴- خطاهای مربوط به ماتریس کسینوسهای هادی

ماتریس دوران بدست آمده از رابطه (۴) را با C و ماتریس دقیق[1] مربوطه را با B نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف، ماتریس B متعامد بوده و در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$BB^T = I\,, \qquad (۲۴)$$

$$C = (I + E)B\,, \qquad (۲۵)$$

که B^T ترانهاده ماتریس B و I ماتریس یکانی است. ماتریس C را می‌توان بر حسب ماتریس B و یک ماتریس خطا E به صورت زیر نوشت[۴].

با توجه به رابطه فوق، در صورتیکه ماتریس C کاملاً دقیق باشد در آن صورت $E = 0$ خواهد بود. با توجه به رابطه (۲۵) برای ماتریس محاسبه شده C می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$CC^T = (I + E)(I + E)^T\,, \qquad (۲۶)$$

از آنجائیکه E نماینده یک اغتشاش در نتیجه خطاهای کوچک است فرض می‌کنیم E کوچک بوده و از توانهای مرتبه بالای آن صرفنظر می‌کنیم. بنابراین با بسط رابطه فوق و صرفنظر از ترم EE^T داریم:

$$CC^T = I + E + E^T\,, \qquad (۲۷)$$

ماتریس E را می‌توان به صورت مجموعی از دو ماتریس متقارن S و پادمتقارن U به صورت زیر نوشت:

$$E = U + S\,, \qquad (۲۸)$$

که با توجه به تعریف، S و U دارای خواص زیرند:

[1] Exact

$$S^T = S\,, \qquad (۲۹\ \text{الف})$$

$$U^T = -U\,, \qquad (۲۹\ \text{ب})$$

با جایگذاری (۲۸) در (۲۷) و با توجه به روابط (۲۹) می‌توان نوشت:

$$CC^T = I + 2S\,, \qquad (۳۰)$$

$$S = \frac{1}{2}(CC^T - I), \qquad (۳۱)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که ماتریس S نماینده میزان انحراف C از حالت تعامد است. با توجه به آنچه در مورد خطاها گفته شد، واضح است که المانهای S را می‌توان به عنوان خطاهای مقیاس و اریب ماتریس C در نظر گرفت. بویژه اینکه عناصر قطری S به عنوان خطاهای مقیاس و عناصر غیر قطری $2S$ خطاهای اریب می‌باشند. بدیهی است که S با توجه به دانش ما از C (بدون نیاز به داشتن ماتریس B) بدست می‌آید. همچنین با استفاده از روابط (۲۸) و (۲۹) می‌توان S و U را بر حسب ماتریس خطای E به صورت زیر نوشت:

$$S = \frac{1}{2}(E + E^T), \qquad (۳۲\ \text{الف})$$

$$U = \frac{1}{2}(E - E^T), \qquad (۳۲\ \text{ب})$$

با بدست آوردن E از رابطه (۲۵) به صورت $E = CB^T - I$ و جایگذاری در رابطه (۳۲ب) می‌توان ماتریس U را به صورت زیر نوشت:

$$U = \frac{1}{2}(CB^T - BC^T), \qquad (۳۳)$$

در نهایت با استفاده از روابط (۲۵) و (۲۸) داریم:

$$CB^T = I + S + U. \qquad (۳۴)$$

با توجه به این رابطه، اگر خطاهای مقیاس و اریب ماتریس C تصحیح شود (S صفر شود)، آنگاه U نشان دهنده انحراف C از معکوس ترانهاده B خواهد بود. بنابراین المانهای خارج قطر اصلی U نماینده خطای دریفت C نسبت به B است. رابطه (۳۳) متوسط عناصر بالا و پایین قطر اصلی CB^T را به عنوان خطای انحراف نشان می‌دهد. بدیهی است که برای محاسبه U لازم است که C و B هر دو مشخص باشد زیرا U نماینده دوران C نسبت به B است. خطاهای فوق را می‌توان بر حسب المانهای ماتریس B و C نوشت که در ادامه به آن می‌پردازیم.

۵- خطای مقیاس

با توجه به آنچه در بالا گفته شد عناصر روی قطر اصلی ماتریس S به عنوان خطای مقیاس می‌باشند که به کمک رابطه (۳۱) می‌توان آن را بر حسب المانهای ماتریس C به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}(b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + b_{i3}^2 - 1) \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \qquad (۳۵)$$

می‌دانیم یکی از قیدهای ماتریس دوران این است که اندازه هر سطر ماتریس برابر ۱ است. در اینجا مشاهده می‌شود که خطای مقیاس به نوعی انحراف از این مقدار را نشان می‌دهد.

۶- خطای اریب

محورهای دستگاه مختصات جدید ممکن است کاملاً بر هم عمود نباشند. خطای اریب به معنی انحراف زاویه بین دو محور از مقدار ۹۰ درجه است:

$$\varepsilon_k = \sin^{-1} \quad \text{(ضرب داخلی هر دو سطر)} \qquad (۳۶)$$

که با تقریبی خوبی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\varepsilon_i = b_{k1}b_{j1} + b_{k2}b_{j2} + b_{k3}b_{j3} \qquad i = 1\ ,2,3 \qquad k = 1\ ,2 \quad j = 2,3 \quad k \neq j, \qquad (۳۷)$$

که برابر با عناصر بالا (و یا پایین) قطر اصلی CC^T (و یا همان $2S$) است. با توجه به آنچه گفته شد ملاحظه می‌شود که خطاهای مقیاس و اریب به نوعی انحراف از تعامد را نشان می‌دهد. در این حالت ممکن است یا محورها بر هم عمود نباشند (خطای اریب) و یا بردارهای پایه یکه نباشند (خطای مقیاس). در هر صورت برای بدست آوردن این خطاها نیازی به داشتن ماتریس دقیق B نیست.

۷- خطای انحراف

در دو نوع خطایی که در قسمت قبل گفته شد، خطا با انحراف ماتریس کسینوسهای هادی از حالت تعامد بوجود می‌آید و بدون نیاز به داشتن ماتریس دقیق B این خطاها قابل دستیابی بود. در حالیکه خطای دریفت نشان دهنده یک دوران غیر دقیق است و لذا برای محاسبه آن نیاز به ماتریس دقیق B داریم. واضح است که ماتریس CB^T نشان دهنده این انحراف است و لذا عناصر بالا و یا پایین قطر اصلی CB^T نشان دهنده خطای دریفت است که می‌توان از متوسط آن به عنوان خطای دریفت استفاده کرد (رابطه ۳۳).

۸- متعامد سازی ماتریس کسینوسهای هادی

در این قسمت با استفاده از یکسری فرضیات ساده کننده، ماتریس کسینوسهای هادی را متعامد کرده و لذا خطاهای مقیاس و اریب آن را (بدون تبدیل به خطای انحراف) حذف می‌کنیم. در این روش خطای انحراف تغییری نمی‌کند. در رابطه (۲۵) فرض می‌کنیم $U = 0$ در این صورت

$$C = (I + S)B, \qquad (۳۸)$$

با استفاده از رابطه فوق داریم:

$$B = (I + S)^{-1} C, \qquad (۳۹)$$

که ماتریس S در رابطه (۳۱) داده شده است. ترم $(I+S)^{-1}$ را با تقریب درجه یک به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(I + S)^{-1} \cong I - S, \qquad (۴۰)$$

با استفاده از این تقریب رابطه (۳۹) به صورت زیر خواهد شد (به دلیل استفاده از تقریب فوق بجای B از $\tilde{B}$ استفاده می‌کنیم که خود تقریبی از B است):

$$\tilde{B} = (I - S)C, \qquad (۴۱)$$

با جایگذاری S از رابطه (۳۱) در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\tilde{B} = (\frac{3}{2} I - \frac{1}{2} C C^T) C, \qquad (۴۲)$$

در صورتیکه $\tilde{B}$ هنوز دارای خطاهای مقیاس و اریب قابل ملاحظه‌ای باشد می‌توان چندین بار از رابطه فوق استفاده کرد:

$$\tilde{\tilde{B}} = (\frac{3}{2} I - \frac{1}{2} \tilde{B} \tilde{B}^T) \tilde{B}. \qquad (۴۳)$$

۹- خطاهای مربوط به کواترنیونها

در این حالت می‌توان کواترنیونهای بدست آمده از رابطه (۲۱) را طبق رابطه (۱۴) به ماتریس دوران C تبدیل نمود و از روابط قبل مقادیر خطاها را بدست آورد. اما با توجه به اینکه با انجام این محاسبات خطاهای عددی بروز می‌کند لذا معمولاً ترجیح داده می‌شود که از روابط مستقیم خطاهای کواترنیونها بدست آورده شود که در ادامه به آن می‌پردازیم.

۱۰- خطای مقیاس

با جایگذاری رابطه (۱۴) در (۳۵) خطای مقیاس به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 - 1) \qquad i = 1,2,3. \qquad (۴۴)$$

به طوریکه ملاحظه می‌شود، خطای مقیاس برای کواترنیونها دارای تنها یک مقدار است و در صورتیکه نرم کواترنیونها برابر ۱ باشد این خطا برابر صفر است. توجه کنید که این خطا دقیقاً دو برابر خطای مقیاس مربوط به کسینوسهای هادی است.

۱۱- خطای اریب

با جایگذاری رابطه (۱۴) در (۳۱) داریم:

$$S = \frac{1}{2}(\left(\sum_{i=1}^{4} q_i^2\right)^2 - 1)I, \qquad (۴۵)$$

بنابراین

$$\varepsilon_i = 0 \qquad i = 1,2,3. \qquad (۴۶)$$

به طوریکه مشاهده می‌شود خطای اریب مربوط به کواترنیونها برابر صفر است.

۱۲- خطای انحراف

با توجه به تعاریفی که در مورد خطای انحراف ارائه شد می‌توان نوشت:

$$q_c = q_e q, \qquad (۴۷)$$

در رابطه فوق q_c کواترنیون محاسبه شده (غیر دقیق)، q_e کواترنیون واسط که شامل خطای انحراف بوده و در حالت ایده آل برابر ۱ است و q کواترنیون دقیق است. با استفاده از رابطه فوق، q_e را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$q_e = q_c q^{-1}, \qquad (۴۸)$$

با توجه به اینکه نرم q برابر ۱ است لذا:

$$q_e = q_c q^*, \qquad (۴۹)$$

در اینجا نیز مشابه رابطه (۲۵) می‌توان رابطه (۴۷) را به صورت زیر نوشت:

$$q_c = (1 + q_e) q, \qquad (۵۰)$$

در این حالت q_e را به صورت $q_e = q_{e2} i + q_{e3} j + q_{e4} k$ در نظر می‌گیریم و المانهای q_e خطای انحراف می‌باشد

و $q_e^* = -q_e$. از رابطه (۵۰) q_e را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$q_c q^* = 1 + q_e \,, \qquad (۵۱)$$

همچنین داریم:

$$q q_c^* = 1 - q_e \,, \qquad (۵۲)$$

با توجه به دو رابطه فوق داریم:

$$q_e = \frac{1}{2}(q_c q^* - q q_c^*). \qquad (۵۳)$$

به طوریکه ملاحظه می‌شود این رابطه مشابه رابطه (۳۳) است که برای ماتریس کسینوسهای هادی بدست آوردیم. همانطور که گفته شد المانهای رابطه فوق به صورت $q_e = q_{e2}i + q_{e3}j + q_{e4}k$ می‌باشد که q_{ei} ها ترمهای خطای انحراف می‌باشند. باید توجه داشت برای اینکه بتوان خطای انحراف کواترنیونها را با خطای انحراف کسینوسهای هادی مقایسه کرد می‌بایست $1+q_e$ را تبدیل به ماتریس دوران نمود در آن صورت ماتریس حاصله همان ماتریس U است که المانهای قطر اصلی آن برابر ۱ است. در اینجا نیز این خطا دقیقاً دو برابر خطای انحراف مربوط به کسینوسهای هادی است. علت دو برابر بودن خطای مقیاس و انحراف کسینوسهای هادی نسبت به کواترنیونها با توجه به روابط (۱۰) و (۱۱) کاملاً واضح است (کواترنیونها دو بار در بردار ضرب می‌شوند).

۱۳- نرمالایز کردن کواترنیونها

کواترنیونها را می‌توان با مقایسه مجموع مربعات عناصر آن با عدد ۱ نرمالایز کرد. بدین ترتیب خطای مقیاس کواترنیونها حذف خواهد شد. خطای نرمالایز به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta q = 1 - q q^* , \qquad (۵۴)$$

کواترنیونها را می‌توان با تقسیم هر المان آن بر $\sqrt{qq^*}$ نرمال کرد بنابراین:

$$\tilde{q} = \frac{q}{\sqrt{qq^*}} = (1-\Delta q)^{-0.5} q \,, \qquad (۵۵)$$

با تقریب بسیار خوبی رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{q} \approx (1 + \frac{1}{2}\Delta q) q \,. \qquad (۵۶)$$

توجه کنید که متعامد سازی و نرمالایز کردن نمی‌تواند خطاهایی را که در نتیجه محاسبات مربوط به روابط (۴) و (۲۱) ایجاد می‌شود را تصحیح کند. برای مثال اگر خطایی در یک المان کواترنیون وجود داشته باشد با نرمالایز کردن این خطا به کل المانها انتقال می‌یابد. لذا تکنیکهای متعامد سازی و نرمالایز کردن می‌بایست بسیار با احتیاط انجام شود. بنابراین تاکید بیشتر باید بر روی طراحی و انتخاب الگوریتم به روز کردن انجام شود نه صرفاً تکیه بر روشهای متعامد سازی و نرمالایز کردن.

۱۴- مثال عددی

فرض کنید دستگاه مختصات بدنی نسبت به دستگاه مرجع دارای زوایای سمت، پیچ و رول به ترتیب برابر ۶۰،۲۰ و ۳۰ درجه باشد در اینصورت ماتریس B به صورت زیر خواهد بود[۱].

$$B = \begin{bmatrix} 0.4698 & 0.1107 & 0.8758 \\ 0.1710 & 0.9619 & -0.2133 \\ -0.8660 & 0.2500 & 0.4330 \end{bmatrix},$$

کواترنیونهای مربوطه نیز با توجه به رابطه کواترنیونها بر حسب زوایای اویلر به صورت زیر بدست می‌آید[۱].

$$q = 0.8463 + 0.1369\mathrm{i} + 0.5145\mathrm{j} + 0.0178\mathrm{k},$$

حال کواترنیون محاسبه شده (غیر دقیق) که دارای خطا می‌باشد را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$q_c = 0.8473 + 0.134\mathrm{i} + 0.5175\mathrm{j} + 0.0218\mathrm{k},$$

با استفاده از رابطه (۴۴) خطای مقیاس کواترنیونها به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_i = 0.0022 \qquad i = 1,2,3.$$

همچنین با استفاده از رابطه (۵۳) خطای انحراف مربوط به کواترنیونها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$q_e = 0.0002\mathrm{i} + 0.0014\mathrm{j} + 0.0048\mathrm{k}$$

در ادامه خطاهای فوق را از طریق ماتریس کسینوسهای هادی بدست می‌آوریم. با جایگذاری q_c در رابطه (۱۴) ماتریس C به صورت زیر بدست می‌آید:

$$C = \begin{bmatrix} 0.4677 & 0.1026 & 0.8829 \\ 0.1766 & 0.9671 & -0.2060 \\ -0.8711 & 0.2511 & 0.4323 \end{bmatrix},$$

با استفاده از روابط (۳۱) و (۳۳) ماتریسهای S و U به صورت زیر می‌باشند:

$$S = \begin{bmatrix} 0.0044 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0044 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0044 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -0.0096 & 0.0029 \\ 0.0096 & 0 & -0.0004 \\ -0.0029 & 0.0004 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریسهای فوق به ترتیب نشان دهنده خطاهای مقیاس و انحراف می‌باشند. به طوریکه ملاحظه می‌شود مقادیر خطاهای مذکور دقیقاً دو برابر خطاهایی می‌باشد که از طریق کواترنیونها بدست آوردیم در حالیکه انتظار بر این بود که مقادیر این خطاها در هر دو روش یکسان باشد. علت این امر با توجه به روابط (۱۰) و (۱۱) واضح است. با استفاده از رابطه (۱۱) و ضرب ماتریس S در یک بردار، طول این بردار 0.0044 برابر شده و به دستگاه مرجع انتقال می‌یابد در حالیکه با استفاده از رابطه (۱۰) می‌بایست خطای مقیاس کواترنیونها یعنی عدد 0.0022 هم در سمت راست و هم در سمت چپ بردار مذکور ضرب شود که نتیجه همان عدد0.0044 خواهد بود. تحلیل مشابه را می‌توان برای خطای انحراف نیز انجام داد. بنابراین برای مقایسه رابطه (۴) و (۲۱) و مقایسه خطاهای مطرح شده در این مقاله به دو صورت می‌توان عمل کرد. ۱- کواترنیون بدست آمده از رابطه (۲۱) را به کمک رابطه (۱۴) تبدیل به ماتریس دوران نموده و با استفاده از روابط داده شده می‌توان ماتریسهای S و U را بدست آورده و خطای دو روش را با هم مقایسه کرد (توجه کنید که استفاده از رابطه (۱۴) و تبدیل کواترنیونها به ماتریس دوران هیچ خطایی را از بین نمی‌برد در حالیکه عکس آن صادق نیست و تبدیل ماتریس دوران به کواترنیون باعث تغییر برخی خطاها می‌شود چون این تبدیل با فرض اینکه نرم کواترنیون برابر ۱ است انجام می‌شود. بنابراین برای مقایسه خطاها نمی‌توان ماتریس کسینوسهای هادی را تبدیل به کواترنیونها کرد). ۲- خطای ماتریس دوران بدست آمده از رابطه (۴) و نیز خطای کواترنیون بدست آمده از رابطه (۲۱) را به صورت جداگانه از روابط داده شده بدست آورده و سپس خطاهای مربوط به ماتریس دوران را با دو برابر خطاهای کواترنیونها مقایسه کرد.

۱۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا دو روش متعارف برای حل عددی معادله دیفرانسیل انتشار وضعیت هواپیما ارائه شده است. متعاقبا خطاهای مقیاس، انحراف و اریب ماتریس دوران حاصل از این دو روش معرفی گردیده و نحوه محاسبه آنها توصیف شده است . از دیگر نکات مهم که در این مقاله نشان داده شده آن است که کواترنیونها ذاتاً دارای خطای اریب صفر بوده و لذا نسبت به کسینوسهای هادی از مزیت بیشتری برخوردار می‌باشند. در انتها نیز روشی بر اساس تکرار برای متعامد نمودن ماتریس کسینوسهای هادی ارائه شده که از این طریق قادر خواهیم بود خطای مقیاس و اریب آن را بدون تبدیل به خطای انحراف حذف نمائیم . همچنین با توجه به مباحث بخش پایانی مقاله و در مقام مقایسه ای بین

دو روش ، باید خطاهای کسینوسهای هادی را با دو برابر خطاهای کواترنیونها قیاس نمود.

مراجع

1. Titterton, D. H. and Weston, J. L., " Strapdown Inertial Navigation Technology", AIAA, Second Edition, 2004.
2. Wilcox, J. C, "A New Algorithm for Strapped-down Inertial Navigation", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-3, No. 5, September 1967, pp. 796-802, 1967.
3. Gusinsky, V.Z., Lesyuchevsky, V.M., and Litmanovich, Yu. A., "A New Procedure for Deriving Optimized Strapped Down Attitude Algorithms", J. Guidance, Control, and Dynamics. Vol. 20, No. 4, July-August, 1997.
4. Lovern, N., and Pieper, J.K., "Error Analysis of Direction Cosines and Quaternion Parameters Techniques for Aircraft Attitude Determination", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 34, No. 3, pp. 983-989, July, 1998 .
5. Jiang, Y. F. and Lin, Y. P., "Error Analysis of Quaternion Transformation", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 27, No. 4, pp. 634-639, 1991.
6. Mortensen, R. E., "Strapdown Guidance Error Analysis", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-10, No. 4, , pp. 451-457, July, 1974.