

محاسبه فرکانس‌های طبیعی صفحات کامپوزیتی با شرایط مرزی آزاد - آزاد و استفاده از روش انرژی

جعفر اسکندری جم^۲
دانشگاه صنعتی مالک اشتر

مریم آرامش^۱
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات،
دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، گروه مهندسی هوافضا

چکیده

در این تحقیق ارتعاشات آزاد صفحات کامپوزیتی تحت شرایط مرزی کاملاً آزاد توسط روش ریلی - ریتز بررسی شده است. در اکثر فعالیت‌هایی که در این زمینه انجام شده، صفحات تحت شرایط مرزی گیردار فرض شده‌اند که به دلیل صفر شدن مشتق دوم به بعد، جابجایی‌های عرضی به سادگی توسط سری فوریه قابل محاسبه می‌باشند. این در حالی است که در حالت شرایط مرزی آزاد به علت وارد شدن برخی فاکتورهای مشتق سوم، حجم محاسبات بالا رفته منجر به محدودیت محاسبات کامپیوتری می‌شود. در این مقاله، با در نظر گرفتن کوچکترین تابع چند جمله‌ای مرتبه چهار برای ارضاء شرایط مرزی، مشکل مذکور مرتفع و فرکانس‌های طبیعی صفحات استخراج شده‌اند. نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج موجود در مراجع معتبر مقایسه شده و از دقت رضایت بخشی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، صفحه کامپوزیتی، شرایط مرزی آزاد - آزاد، روش ریلی ریتز

Natural Frequencies of Composite Plates under Free-Free Boundary Conditions via Energy Methods

M. Aramesh

Aramesh Eng. Group Mech. and Aerospace Eng. . Dep't ,
Science and Research Branch. Islamic Azad Univ.

Jafar Eskandari Jam

Malek Ashtar univ. of Tech.

ABSTRACT

In this paper, the free vibration of laminated plates under free-free boundary conditions is studied via numerical methods of Rayleigh-Ritz. Most of the earlier works are concerned with plates under simply supported and clamped boundary conditions. In free-free condition however, because of existence of some terms of 3rd order derivations of displacement in equations, we encounter many problems in numerical computations. To solve these problems, the smallest trial function which satisfies the boundary conditions is computed by means of a 4th order polynomial. Then the natural frequencies are obtained via calculating mass and stiffness matrixes and utilizing the well known routines.

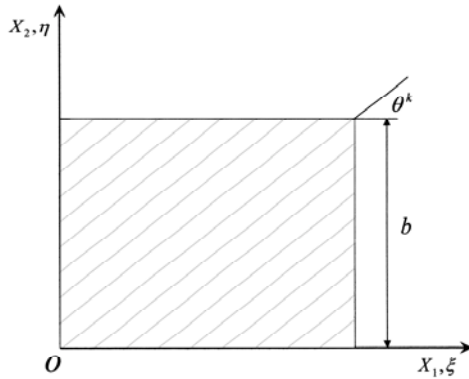
Key Words: Free Vibration, Composite, Plates, Rayleigh-Ritz Method

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد (نویسنده پاسخگو): aramesh.mary@gmail.com

^۲ استادیار: jejam@mail.com

۱- مقدمه

را با فرض جابجایی‌های کوچک و با استفاده از مشتق‌های مؤلفه‌های جابجایی، به صورت زیر به دست آورد:



شکل (۱): هندسه صفحه.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.$$

با توجه به این که مشتق‌های مرتبه دوم مؤلفه خیز (w_0) انحنای صفحه میانی را تعریف می‌نمایند، می‌توان کرنش‌های صفحه چند لایه را برحسب کرنش و انحنای صفحه میانی، طبق رابطه (۲) نوشت:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

که در آن، کرنش‌های صفحه میانی از رابطه (۳) و انحنای صفحه نیز از رابطه (۴) به دست می‌آیند.

سازه‌های کامپوزیتی که از مواد چندلایه تشکیل شده‌اند یکی از مهمترین سازه‌ها در مهندسی مدرن بخصوص در صنعت هوافضا می‌باشند. استفاده از این سازه‌های سبک همچنین در کاربردهای مهندسی در علوم عمران، مکانیک و حمل و نقل افزایش یافته است. افزایش سریع استفاده از این سازه‌ها لزوم استفاده از ابزارهای عددی و تحلیلی مناسب برای تحلیل رفتار مکانیکی آنها را ضروری می‌سازد.

پاسخ دینامیکی سازه‌های کامپوزیتی چند لایه موضوعاتی هستند که همواره در سال‌های اخیر مورد توجه و مطالعه قرار گرفته‌اند و دلیل آن نقش بسیار مهم آنها در کاربردهای صنعتی می‌باشد. میروویچ^۱ [۱] و واربرتون^۲ [۲] پاسخ دینامیکی صفحات ایزوتروپیک را بررسی کردند. یو^۳، سان^۴ و ویتنی^۵ [۳] پاسخ را برای صفحات غیرایزوتروپیک در سیلندرها با استفاده از روش میندلین [۴]، برای تعیین سختی برشی نرمال بدست آوردند. ارتعاشات آزاد صفحات کامپوزیتی کاملاً آزاد نیز توسط روش‌های حل دقیق اخیراً مورد توجه قرار گرفته است [۵-۶].

در این تحقیق، برای تحلیل دینامیکی صفحه با استفاده از روش انرژی ابتدا ماتریس‌های جرم و سختی از طریق محاسبه ماکزیمم مقدار انرژی جنبشی و پتانسیل بدست آمده‌اند و تحلیل با استفاده از آن صورت گرفته است. در ضمن، از تغییر شکل‌های برشی، اینرسی چرخشی و اثرات استهلاک صرف نظر شده است.

۲- معادلات حاکم

یک صفحه‌ی کامپوزیتی مانند شکل ۱ با ضخامت کل h و لایه ارتوتروپیک را در نظر بگیرید. a و b ابعاد صفحه در جهت محورهای x و y می‌باشند. جابجایی هر نقطه در جهت z با w نشان داده می‌شود. می‌توان کرنش‌های ε_x ، ε_y و ε_{xy} در ماده مرکب

¹ Meirovitch
² Warburton
³ Yu
⁴ Sun
⁵ Whitney

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}), \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3).
 \end{aligned}
 \tag{۸}$$

در روابط (۸) A سختی‌های محوری، B سختی‌های کویپل شده خمشی و محوری و D سختی‌های خمشی می‌باشند. \bar{Q}_{ij} نیز ماتریس سختی تعمیم یافته می‌باشد به‌طوریکه:

$$[\bar{Q}_{ij}] = [T][Q_{ij}][T]^T. \tag{۹}$$

همچنین داریم:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \tag{۱۰}$$

مقادیر Q_{ij} بر اساس روابط (۱۱) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned}
 \tag{۱۱}$$

T نیز ماتریس تبدیل می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial u} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{۳}$$

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \tag{۴}$$

تنش‌ها نیز با استفاده از قانون هوک به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{۵}$$

نیروها و ممان‌ها نیز بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dZ \\
 M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x Z dZ
 \end{aligned}
 \tag{۶}$$

که با ساده‌سازی روابط خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۷}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

که در آن،

با بسط دادن و ساده سازی روابط بالا می توان تابع انتخابی مورد نظر را به یک سری چند جمله ای مرتبه ۴ نوشت:

$$W(\varepsilon, \eta) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \varepsilon^{i+3} (1-\varepsilon)^4 \eta^{j+3} (1-\eta)^4 \quad (16)$$

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \eta = \frac{x_2}{b}$$

لازم به ذکر است که سری مورد نظر تا جایی بسط داده شده که خطاهای محاسباتی به حداقل ممکن برسد. با فرض هارمونیک بودن پاسخ صفحه، تابع جابجایی به صورت زیر بیان می شود:

$$w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) \sin \omega t \quad (17)$$

تعیین ماتریس های جرمی و سختی

با استفاد از تئوری الاستیسیته، انرژی های کرنشی و جنبشی به صورت زیر قابل بیان می باشند:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \int_{V_k} [\sigma]_k [\varepsilon]_k^T dV \\ T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \int_{V_k} \rho_k (\dot{w}^2)_k dV \end{cases} \quad (18)$$

که در آن، k تعداد لایه ها و V حجم ماده می باشد. کرنش های صفحات چند لایه به صورت تابعی از کرنش و انحنای صفحه میانی به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (19)$$

که در آن، کرنش های صفحه میانی و انحنای صفحه نیز از روابط (۲۰) و (۲۱) به دست می آیند.

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

که در آن

$$\begin{cases} s = \sin \theta \\ c = \cos \theta \end{cases} \quad (13)$$

۳- روش حل

در این تحقیق از روش ریلی ریتز برای تحلیل استفاده شده است. در روش ریلی ریتز، تابع انتخابی باید به گونه ای انتخاب شود که شرایط مرزی کاملاً آزاد را ارضا نمایند.

۴- شرایط مرزی کاملاً آزاد

در شرایط مرزی کاملاً آزاد، نیروها و گشتاورها در لبه های آزاد صفحه مساوی با صفر می باشد بطوریکه:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad @ \quad x=0, x=a, \\ Q_y &= \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad @ \quad y=0, y=a, \end{aligned} \quad (14)$$

$$M_{xy} = 0 \quad @ \quad x=0, x=a,$$

$$M_{xy} = 0 \quad @ \quad y=0, y=a,$$

که در آن،

$$\begin{aligned} M_y &= -D_y \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\}, \\ M_{xx} &= -D_x \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\ M_{xy} &= -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)},$$

$$D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12}.$$

نتایج

با مشخص شدن ماتریس‌های جرمی و سختی یک مسئله مقدار ویژه به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$([K] - \omega^2 [M])[X] = 0. \quad (26)$$

می‌توان فرکانس‌های طبیعی را براساس صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرائب $[k] - \omega^2 [M]$ بدست آورد. همچنین، شکل مدها با جایگزینی فرکانس‌ها در معادله (۲۶) بدست می‌آیند. فرکانس‌های طبیعی شش مد اول برای لایه‌های متقارن زاویه‌دار $(0, 90)_s$ مربوط به ماده مرکب گرافیت اپوکسی (با مشخصات ذکر شده در جدول ۱ برای هر لایه در جدول ۲ نشان داده شده است. در ضمن، نتایج حاصله با نتایج ارائه شده با نرم افزار انسیس^۱ مقایسه شده و تطابق مطلوبی را نشان می‌دهد که تاییدکننده درستی روش ارائه شده می‌باشد.

جدول (۱): مشخصات هندسی و مکانیکی لایه‌ها.

a(m)	1
a/b	1
t(m)	6E - 6 m
$E_{11}(GPa)$	15.5
$E_{22}(GPa)$	12.1
$G_{12}(GPa)$	4.4
ν_{12}	0.248

جدول (۲): نتایج شش فرکانس اول.

فرکانس	سوم	دوم	اول
نتایج تحقیق	3.3176	2.5981	1.1131
ANSYS	3.2981	2.5653	1.0323

فرکانس	ششم	پنجم	چهارم
نتایج تحقیق	7.1002	5.8831	5.5143
ANSYS	7.0273	5.8407	5.4871

همچنین، شکل مدهای اول تا ششم نیز در شکل ۲ نشان داده شده است:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

تنش‌ها نیز با استفاده از قانون هوک به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}_K = [Q]^K \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}_k. \quad (22)$$

برای بدست آوردن ماتریس جرمی و سختی، روابط انرژی جنبشی حداکثر را با توابع ماتریسی زیر هم ارز قرار می‌گیرد بطوریکه:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} [X]^T [K] [X], \quad (23)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 [X]^T [M] [X].$$

در اینجا داریم:

$$[X]^T = [\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{MN}]. \quad (24)$$

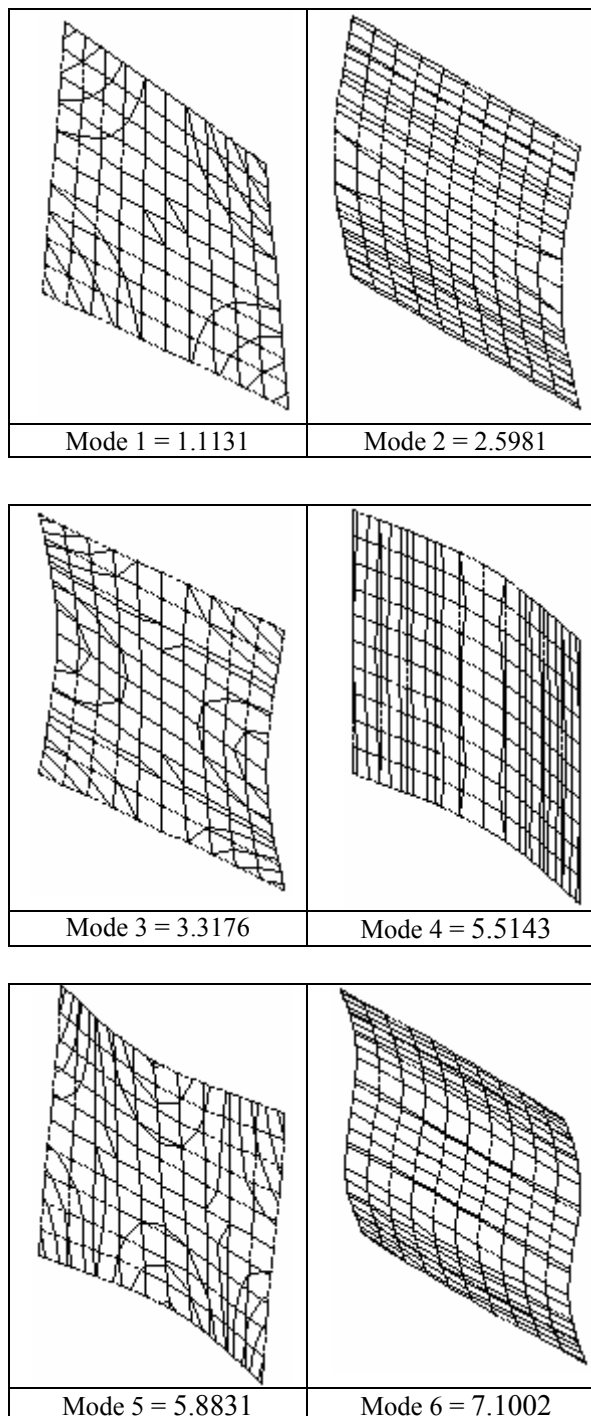
با حل این معادله، ماتریس‌های جرمی و سختی بدست می‌آیند. ضرایب مجهول را نیز می‌توان با استفاده از روش ریلی ریتز بدست آورد که بدین ترتیب و با مشخص شدن مقادیر مجهول در تابع انتخابی پاسخ سازه از روش‌های موجود در دینامیک سازه قابل محاسبه می‌باشد:

$$\frac{\partial (T_{\max} - U_{\max})}{\partial \lambda_i} = 0. \quad (25)$$

آوردن ماتریس‌های جرم و سختی می‌باشد که در ابتدا محاسبه شده است و بقیه روابط بر پایه آن اعمال می‌شود که بدین ترتیب امکان اعمال کلیه بارگذاری‌های مورد نظر را برای محاسبه پاسخ دینامیکی سیستم را مقدور می‌سازد.

مراجع

1. Meirovitch, L., "Analytical Methods in Vibration", MacMillan, London, 1976.
2. Warburton, G.B., "The Dynamical Behavior of Structures", Pergamon Press. Oxford. 1964.
3. Whitney, J.M. and Sun, C.T., "Transverse Response of Laminated Composite Plate Subjected to Transverse Dynamic Loading", J. acoustical Soc. Amer., Vol. 61, No.1, pp.101-104, 1977.
4. Mindlin, R.D., "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic Elastic Plate", J. Appl. Mech. 18, pp. 1951.
5. Gorman, D.J., Ding, W. "Accurate Free Vibration Analysis of Completely Free Symmetric Cross-Ply Rectangular Laminated Plates", Composite Structures, New York, Vol. 60, No.3, pp. 359-365, New York, 2003.
6. Filipich, C.P., Rosales, M.B., (2000) "Arbitrary Precision Frequencies of a Free Rectangular Thin Plate", J. Sound and Vibration, 230, pp.521-539, 2000.
7. Qatu, M., "Vibration of Laminated Shells and Plates", Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2004.
8. Lu Chun & Lam, K.Y., "Dynamic Analysis of Clamped Laminated Curved Panels ", J. Composite Structures, Vol. 30, No.4, pp. 389-398, New York, 1995.
9. Reddy, J.N. and Khdeir, A.A., "Dynamic Response of Cross-ply Laminated Shallow Shells According to a Refined Shear Deformation Theory", J. Acoustic Society of America, New York, Vol. 85, No.6, pp. 2423-2431, 1989.
10. RedeKap D. and Azar P. (1991) "Dynamic Response of a Cylindrical Shell Panel to Explosive Loading", J. Vibration and Acoustics, Vol. 113, No.3, pp. 273-278, New York, 1991.
11. Christoforou, A. P., and Swan son, S. P., "Analysis of Simply- Supported or Thopic Cylindrical Shells Subject to Lateral Impact Loads", J. Applied Mechanics, Vol. 57, No.2, pp. 376-382, New York, 1990.



شکل (۲): مدهای شش فرکانس اول.

۵ - نتیجه گیری

فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای صفحه ارتوتروپیک در حالت کاملاً آزاد با استفاده از روش و ریلی ریتز بدست آمد. مقایسه نتایج با نرم افزار انسیس نشان می‌دهد که این روش در مقایسه با روشهای اجزا محدود موجود از دقت بسیار بالایی برخوردار است. از مزایای استفاده این روش نسبت به روش‌های دیگر بدست