

محاسبه پاسخ آیروالاستیک یک بال دو بعدی به همراه سطح کنترل دارای اثر لقی

امیرحسین مرزبان پور^۱ و حسین شاهوردی^۲

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، گروه مهندسی هوافضا

چکیده

این مقاله به بررسی رفتار آیروالاستیسیته یک ایرفویل به همراه سطح کنترل تحت اثر لقی سطح کنترل پرداخته است. بدین منظور، یک مدل دو بعدی از بال با سه درجه آزادی در نظر گرفته شده است. نیروهای آیرودینامیکی وارد بر ایرفویل با استفاده از تئوری تئودرسون در نظر گرفته شده و معادلات آیروالاستیک حاکم بر ایرفویل بدست آمده است. در انتها، با وارد کردن اثر لقی در روابط حاکم، پاسخ آیروالاستیک ایرفویل با حالت بدون اثر لقی مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: آیروالاستیسیته، تئوری تئودرسون، اثر لقی

Aeroelastic Analysis of Airfoil with Control Surface under Free-play Effect

A.H. Marzbanpour and H. Shahverdi

Mech. and Aerospace Eng. Dep't., Islamic Azad University, Science and Research Branch

ABSTRACT

In this paper, the aeroelastic behavior of an airfoil with a control surface under Free-play effect is studied. For this, Purpose a two-dimensional model of airfoil with 3 degrees of freedom is considered. The aerodynamic lift and moment of the airfoil are obtained via Theodorsen's theory and then the aeroelastic equations are constructed. At the end, by adding the structural free-play effect, the aeroelastic response of the airfoil is computed and the results are compared with those obtained under linear effects.

Key Words: Aeroelasticity, Theodorsen's Theory, Free-play effect

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد(نویسنده پاسخگو): ah.marzbanpour@gmail.com

^۲ استادیار: shahverdi_ho@srbiau.ac.ir

۱- مقدمه

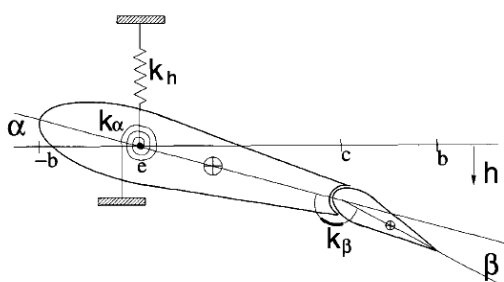
یکی از پدیده‌هایی که باعث می‌شود یک سازه هوافضایی دچار شکست گردد، ناپایداری آیروالاستیکی فلاتر^۱ است. در گذشته بیشتر تحلیل‌های آیروالاستیکی سازه‌ها را با این فرض که سازه مورد نظر تحت اثرات خطی قرار دارد انجام می‌دادند، اما نتایج حاصله با آنچه در عمل برای سازه اتفاق می‌افتاد تفاوت داشت، زیرا اکثر سازه‌ها در حالت واقعی تحت اثرات غیر خطی قرار دارند. زمانی که یک سیستم خطی دچار ناپایداری دینامیکی می‌شود، دامنه پاسخ آن به صورت نمایی افزایش می‌یابد و در نتیجه، سیستم مورد نظر به طور ناگهانی دچار شکست می‌شود، در حالی که در سیستم‌های غیرخطی دامنه‌ی نوسانات را می‌توان در طول زمان محدود کرد که به این حالت، نوسانات با سیکل محدود^۲ می‌گویند و این پدیده باعث می‌شود که سیستم در اثر خستگی، دچار شکست گردد و در واقع این پدیده از شکست ناگهانی جلوگیری می‌کند [۱].

فلاتر برای جریانهای مافوق صوت و همچنین برای بالهای سه بعدی در جریانهای تراکم ناپذیر دارای پیچیدگیهای خاص خود است. دانستن این موضوع که مود خمش یا پیچش سبب فلاتر می‌شود نیز دارای اهمیت است که در حال حاضر به خوبی حل و فصل نشده است. پدیده‌ی فلاتر نه تنها گریبانگیر سازه‌های هوایی است، بلکه در سازه‌های زمینی بلند و پلها نیز ایجاد شده و مشکلاتی را به وجود می‌آورد. اولین بررسی منسجم در رابطه با پدیده فلاتر در سال ۱۹۳۴ توسط تئودرسون^۳ انجام گرفت که نتایج نسبتاً خوب آن هنوز قابل استفاده می‌باشد [۲]. در سال ۱۹۴۰، مکانیزم پدیده فلاتر^۴ توسط تئودرسون^۵ و گاریک^۶ به طور کامل تشریح گردید [۳]. در سال ۱۹۴۲، همین افراد مقاله ای در جهت حل سیستمهایی با سه درجه آزادی ارائه نمودند [۶].

در دهه ۸۰ میلادی، داول^۷ یک ایرفویل با سطح کنترل را مورد بررسی قرار داد. او با کمک روش پی - کی^۸ سرعت فلاتر را بدست آورد که سرعت استخراج شده در این مقاله برای فلاتر با نتایج داول در حالت خطی تطابق دارد [۲].

۲- معادلات سازه ای

مدلی دو بعدی از بال به همراه سطح کنترل در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل (۱): مدلی دو بعدی از بال به همراه سطح کنترل با سه درجه آزادی.

معادله آیروالاستیک حاکم بر ایرفویل با سطح کنترل در حالت کلی عبارتست از [۲]:

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = \{F\}. \quad (1)$$

در ادامه، نحوه استخراج ضرایب ماتریسی معادله‌ی فوق تشریح می‌شود. برای بدست آوردن ماتریسهای جرم و سختی در رابطه (۱) به صورت زیر عمل می‌شود. در ابتدا انرژی پتانسیل را برای سیستم فنرهای شکل ۱ به صورت رابطه (۲) نوشته می‌شود.

$$U = \frac{1}{2}(K_h h^2 + K_\alpha \alpha^2 + K_\beta \beta^2) \quad (2)$$

انرژی جنبشی به صورت رابطه (۳) خواهد بود.

$$T = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \rho(x) r(x)^2 dx \quad (3)$$

¹Flutter

²Limit Cycle Oscillation (LCO)

³Theoderson

⁴Flutter

⁵Theoderson

⁶Garic

⁷Dowell

⁸PK Method

در رابطه فوق، q_i مختصات تعمیم یافته و Q_i نیروی تعمیم یافته سازه می‌باشد.

برای بدست آوردن ماتریسهای جرم و سختی، با جایگذاری رابطه‌های (۲) و (۵) در رابطه (۹) و مشتق-گیری نسبت به مختصات تعمیم یافته، مقادیر ماتریسهای جرم و سختی استخراج می‌شوند:

$$M = \begin{bmatrix} m & s_\alpha & s_\beta \\ s_\alpha & i_\alpha & i_\beta + b(c-a)s_\beta \\ s_\beta & i_\beta + b(c-a)s_\beta & i_\beta \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & k_\beta \end{bmatrix}. \quad (11)$$

برای بدست آوردن ماتریس استهلاک، ابتدا باید ماتریس جرم را قطری نمود. بدین منظور از آنالیز مودال کمک گرفته و در ادامه، با داشتن مقادیر $\xi_h, \xi_\alpha, \xi_\beta$ و همچنین $\omega_h, \omega_\alpha, \omega_\beta$ و قرار دادن این مقادیر در رابطه $c_n = 2\xi_n \omega_n M_n$ ، مقادیر درایه‌های ماتریس استهلاک بدست می‌آیند که در آن $n = h, \alpha, \beta$ است. این مقادیر به صورت زیر در ماتریس استهلاک جایگذاری می‌شوند [۴]:

$$C = \begin{bmatrix} c_h & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & c_\beta \end{bmatrix}. \quad (12)$$

۳- معادلات آیرودینامیک

بردار نیروهای رابطه (۱) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -L \\ M_\alpha \\ M_\beta \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

که در آن، نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی و گشتاور مفصلی^۳ به صورت زیر بیان می‌شوند:

در این رابطه، $\rho(x)$ چگالی و $r(x)$ موقعیت طول هر نقطه روی ایرفویل از مرکز الاستیک می‌باشند. برای زوایای کوچک می‌توان نوشت:

$$r(x) \approx \begin{cases} x-h-(x-e)\alpha & -b < x < c, \\ -h-(x-e)\alpha-(x-c)\beta & c < x < b, \end{cases} \quad (4)$$

که در آن، e فاصله محور الاستیک تا نصف وتر^۱، c فاصله محور سطح کنترل تا وتر و h جابجایی عمودی از محور الاستیک است که جهت آن به سمت پایین مثبت در نظر گرفته می‌شود. زاویه حمله ایرفویل و β زاویه سطح کنترل با وتر ایرفویل است.

در نتیجه با جاگذاری معادله (۴) در معادله (۳) انرژی جنبشی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2}(M h^2 + I_\alpha \alpha^2 + I_\beta \beta^2) + \alpha \beta S_\alpha \quad (5)$$

$$+ \beta h S_\beta + \alpha \beta (I_\beta + (c-e)S_\beta),$$

که در آن مقدار جرم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M = \int_{-b}^b \rho(x) dx, \quad (6)$$

و نیز ترمهای ممان اینرسی و نامیزانی جرم^۲ در معادله (۵) عبارتند از:

$$I_\beta = \int_c^b \rho(x)(x-c)^2 dx, \quad (7)$$

$$S_\alpha = \int_{-b}^b \rho(x)(x-e) dx, \quad (8)$$

$$S_\beta = \int_c^b \rho(x)(x-c) dx.$$

اکنون با استفاده از معادله لاگرانژ می‌توان معادلات حاکم بر حرکت سازه را به صورت رابطه (۹) استخراج نمود.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = Q_i \quad (9)$$

¹Chord

²Mass Imbalance

¹Hinge Moment

$$T_6 = T_2, \quad (22)$$

$$T_7 = -\left(\frac{1}{8} + c^2\right) \cos^{-1}(c) + \frac{1}{8}c\sqrt{1-c^2}(7+2c^2), \quad (23)$$

$$T_8 = \left(\frac{-1}{3}\sqrt{1-c^2}(2c^2+1)\right) + c.\cos^{-1}(c), \quad (24)$$

$$T_9 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt{1-c^2}(-c^2+1)\right) + aT_4, \quad (25)$$

$$T_{10} = \cos^{-1}(c) + \sqrt{1-c^2}, \quad (26)$$

$$T_{11} = \cos^{-1}(c)(1-2c) + (2-c)\sqrt{1-c^2}, \quad (27)$$

$$T_{12} = -\cos^{-1}(c)(1+2c) + (2+c)\sqrt{1-c^2}, \quad (28)$$

$$T_{13} = \frac{1}{2}(-T_7 - (c-a)T_1), \quad (29)$$

$$T_{14} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}ac. \quad (30)$$

$$L(t) = -\rho b^2 [v_f \pi \dot{\alpha} - \pi b x_{EA} \ddot{\alpha} - v_f T_4 \dot{\beta} - T_1 b \ddot{\beta} + \pi \dot{h}], \quad (14)$$

$$M_\alpha = -\rho b^2 [v_f b \pi (0.5 - x_{EA}) \dot{\alpha} + \pi b^2 (0.125 + x_{EA}^2) \ddot{\alpha} + (T_4 + T_{10}) v_f^2 \beta + \{T_1 - T_8 - (c - x_{EA})T_4 + 0.5T_{11}\} v_f b \dot{\beta} - \{T_7 + (c - x_{EA})T_1\} b^2 \ddot{\beta} - x_{EA} \pi b \dot{h}], \quad (15)$$

$$M_\beta = -\rho b^2 [v_f b \{-2T_9 - T_1 + T_4(x_{EA} - 0.5)\} \dot{\alpha} + 2T_{13} b^2 \ddot{\alpha} + \frac{1}{\pi} v_f^2 (T_5 - T_4 T_{10}) \beta - \frac{1}{2\pi} v_f b T_4 T_{11} \dot{\beta} - \frac{1}{\pi} T_3 b^2 \ddot{\beta} - T_1 b \dot{h}]. \quad (16)$$

در معادلات (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) مقادیر ضریب T_i به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$T_1 = \frac{-1}{3}\sqrt{1-c^2}(2+c^2) + c.\cos^{-1}(c), \quad (17)$$

$$T_2 = c(1-c^2) - \sqrt{1-c^2}(1+c^2)\cos^{-1}(c) + c(\cos^{-1}(c))^2, \quad (18)$$

$$T_3 = -\left(\frac{1}{8} + c^2\right)(\cos^{-1}(c))^2 + \frac{1}{4}c\sqrt{1-c^2}(1+c^2) \cos^{-1}(c)(7+2c^2) - \frac{1}{8}(1-c^2)(5c^2+4), \quad (19)$$

$$T_4 = -\cos^{-1}(c) + c(1-c^2), \quad (20)$$

$$T_5 = -(1-c^2) - (\cos^{-1}(c))^2 + 2c\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}(c), \quad (21)$$

لازم به ذکر است که معادلات فوق برای حالت شبه پایا^۱ می‌باشند.

^۲Quasi-steady

۴- معادلات آیروالاستیک

با جایگذاری معادلات سازه‌ای و آیرودینامیک در رابطه (۱) معادلات آیروالاستیک حاصل می‌شوند. باید توجه داشت که درجات آزادی رابطه (۱) صورت زیر می‌باشد:

$$x = \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

$$m \ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + S_\beta \ddot{\beta} + K_\alpha h = -L, \quad (32)$$

$$S_\alpha \ddot{h} + i_\alpha \ddot{\alpha} + (i_\beta + b(c-a)S_\beta) \ddot{\beta} = M_\alpha, \quad (33)$$

$$S_\beta \ddot{h} + (i_\beta + b(c-a)S_\beta) \ddot{\alpha} + i_\beta \ddot{\beta} = M_\beta. \quad (34)$$

رابطه‌های (۳۲-۳۴) معادلات آیروالاستیک مربوط به مدل نشان داده شده در شکل ۱ می‌باشند.

۵- وارد کردن اثرات غیرخطی

با در نظر گرفتن یک فنر غیرخطی برای سطح کنترل، اثرات غیرخطی در سمت چپ رابطه (۱) به صورت نماد M_β ظاهر می‌شود [۵]:

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x + M_\beta = \{F\}, \quad (35)$$

که در آن:

$$M_\beta = \begin{cases} K_\beta(\beta - \delta) & |\beta| \geq \delta, \beta > 0 \\ K_\beta(\beta + \delta) & |\beta| \geq \delta, \beta < 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (36)$$

رابطه (۳۶) نشان‌دهنده رابطه غیرخطی بین سختی فنر و جابجایی آن می‌باشد و δ میزان انحراف در سطح کنترل است که هنوز نیروی آیرودینامیکی روی آن شکل نگرفته است.

۶- نتایج و بحث

برای حل معادلات (۳۲-۳۴) با استفاده از روش رانج - کوتای مرتبه ۴ و ۵ می‌توان معادلات را در حوزه زمان حل نموده و پاسخ سازه را استخراج نمود.

مشخصات ایرفویل مورد مطالعه در جدول (۱)

آمده است.

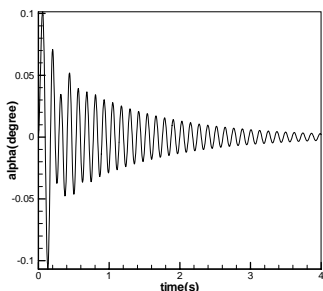
جدول (۱): مشخصات ایرفویل مورد مطالعه

$b(m)$	۰/۳۰۴۸	$k_h(\frac{N}{m})$	۴۵۰۵۱
x_{EA}	-۰/۳	$k_\alpha(\frac{N.m}{rad})$	۱۳۴۵۳/۰۲
c	۱	$k_\beta(\frac{N.m}{rad})$	۳۰۲۶/۸۸
$m(kg)$	۹۰/۱۰۲	$\rho(\frac{kg}{m^3})$	۱/۲۲۵۶
$i_\beta(\frac{kg.m^2}{m})$	۰/۱۶۸۱۶	$i_\alpha(\frac{kg.m^2}{m})$	۶/۷۲۶۵۱
$s_\beta(kg)$	۰/۴۴۱۳۶۶	$s_\alpha(kg)$	۷/۰۴۰۱۷
ξ_h	۰/۰۱۱۳	ξ_α	۰/۰۱۶۲۵
ξ_β	۰/۰۱۱۵		

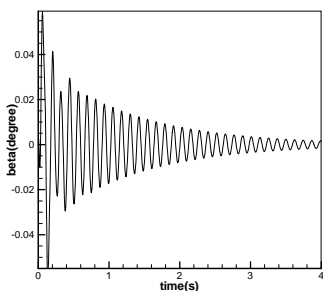
شکل‌های ۱۰-۲ برای سرعت $v_f = 12m/s$ در حالت خطی با تغییر مقدار c رسم شده‌اند. همانطور که در شکل‌های ۴-۲ مشاهده می‌شود در سرعت $v_f = 12m/s$ ، وقتی مقدار c برابر ۰/۰۵- در نظر گرفته می‌شود، نمودارهای تغییرات h ، α و β برحسب زمان واگرا خواهند شد و هر چه مقدار c کوچکتر شود، نمودارهای فوق همگرا خواهند شد.

در شکل‌های ۷-۵ برای سرعت $v_f = 12m/s$ وقتی مقدار c برابر ۰/۰۶۳- می‌شود، نمودارهای تغییرات h ، α و β برحسب زمان همگرا خواهند شد. در شکل‌های ۱۰-۸ برای سرعت $v_f = 12m/s$ ، وقتی مقدار c برابر ۰/۰۷۵- می‌شود، نمودارهای تغییرات h ، α و β برحسب زمان نیز همگرا خواهند شد که در این حالت همگرایی زودتر از حالتی که c برابر ۰/۰۶۳- اتفاق می‌افتد. پس می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش مقدار c یا همان فاصله مرکز لولا تا

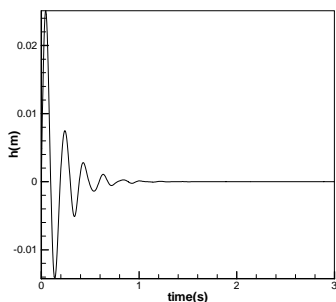
مرکز الاستیک، دامنه تغییرات h ، α و β با گذشت زمان کاهش می‌یابد.



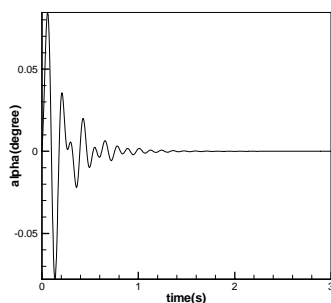
شکل (۶): تغییرات α برای سرعت جریان $v_f = 12 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



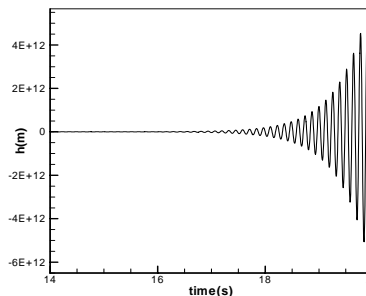
شکل (۷): تغییرات β برای سرعت جریان $v_f = 12 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



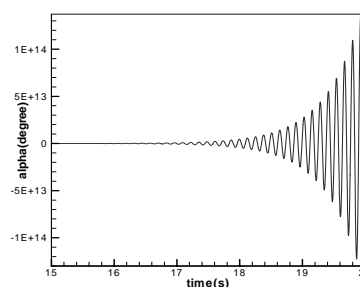
شکل (۸): تغییرات h برای سرعت جریان $v_f = 12 m/s$ و به ازای $c = -0.075$.



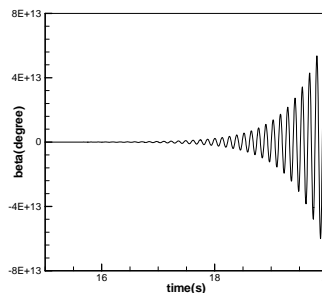
شکل (۹): تغییرات α برای سرعت جریان $v_f = 12 m/s$ و به ازای $c = -0.075$.



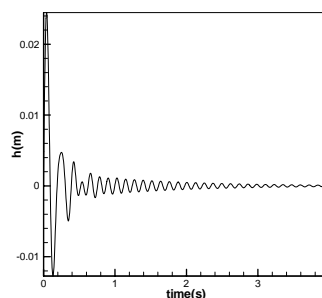
شکل (۲): تغییرات h برای سرعت جریان $v_f = 12 m/s$ و به ازای $c = -0.05$.



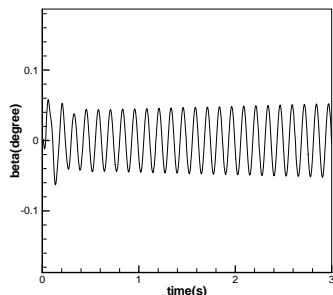
شکل (۳): تغییرات α برای سرعت جریان $v_f = 12 m/s$ و به ازای $c = -0.05$.



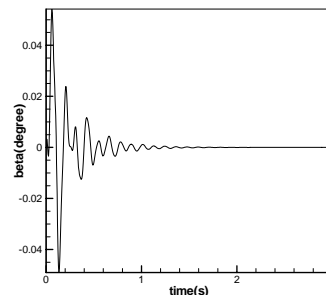
شکل (۴): تغییرات β برای سرعت جریان $v_f = 12 m/s$ و به ازای $c = -0.05$.



شکل (۵): تغییرات h برای سرعت جریان $v_f = 12 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



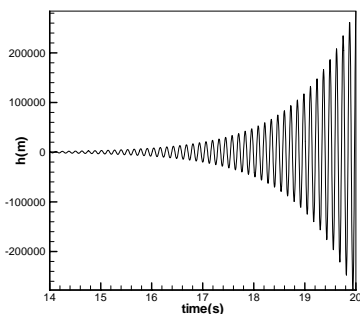
شکل (۱۳): تغییرات β برای سرعت جریان $v_f = 13.2 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



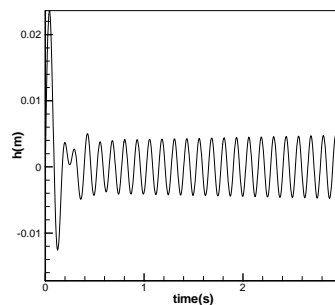
شکل (۱۰): تغییرات β برای سرعت جریان $v_f = 12 m/s$ و به ازای $c = -0.075$.

در همین حالت با افزایش سرعت به میزان ۱۴ متر بر ثانیه ناپایداری فلاتر زیاد می‌شود، که نتایج بدست آمده در شکل‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۶ نشان داده شده است.

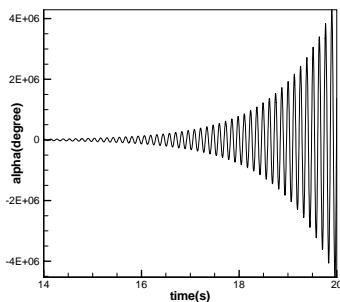
با توجه به شکل‌های ۱۱-۱۳ می‌توان از روی تغییرات h ، α و β دریافت که سرعت $v_f = 13.2 m/s$ آستانه واگرایی است. مقدار c در این حالت برابر -0.063 است.



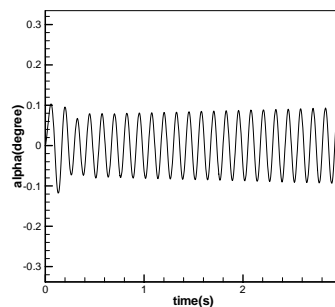
شکل (۱۴): تغییرات h برای سرعت جریان $v_f = 14 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



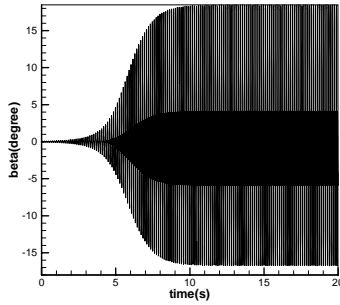
شکل (۱۱): تغییرات h برای سرعت جریان $v_f = 13.2 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



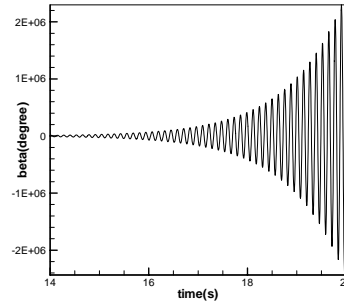
شکل (۱۵): تغییرات α برای سرعت جریان $v_f = 14 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



شکل (۱۲): تغییرات α برای سرعت جریان $v_f = 13.2 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



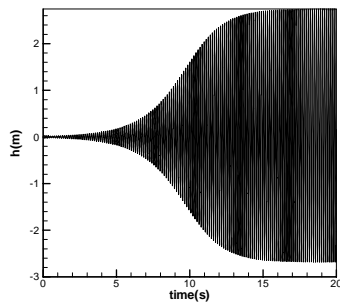
شکل (۱۹): تغییرات β برای سرعت جریان $v_f = 11.5 m/s$ و به ازای $c = -0.05$.



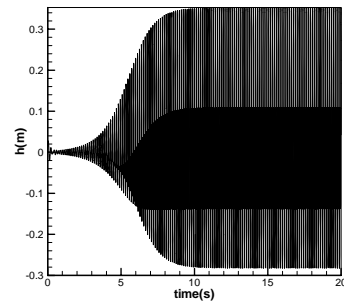
شکل (۱۶): تغییرات β برای سرعت جریان $v_f = 14 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.

با توجه به شکل‌های ۲۰، ۲۱ و ۲۲ می‌توان از روی تغییرات h ، α و β دریافت که در حالت غیرخطی با کاهش مقدار c ، سرعت فلاتر^۱ افزایش و دامنه نوسانات در این حالت کاهش می‌یابد.

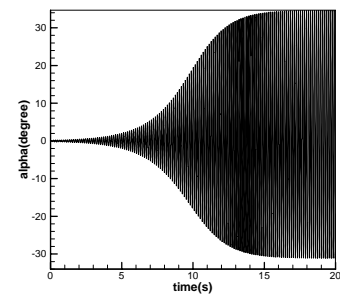
چنانچه اثر غیر خطی ناشی از لقی سطح کنترل در معادلات آیرولاستیک لحاظ شود، نتایج بدست آمده متفاوت خواهد شد. همانطور که در شکل‌های ۱۷-۱۹ ملاحظه می‌شود حالت نوسانات با سیکل محدود^۱ ایجاد می‌شود. همچنین مشخص می‌شود که در مقایسه با حالت خطی سرعت ناپایداری کاهش می‌یابد.



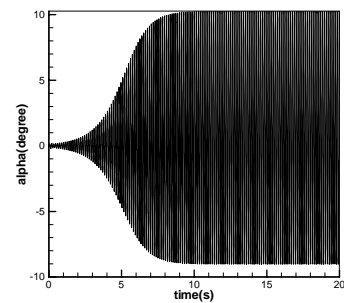
شکل (۲۰): تغییرات h برای سرعت جریان $v_f = 14 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



شکل (۱۷): تغییرات h برای سرعت جریان $v_f = 11.5 m/s$ و به ازای $c = -0.05$.



شکل (۲۱): تغییرات α برای سرعت جریان $v_f = 14 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.



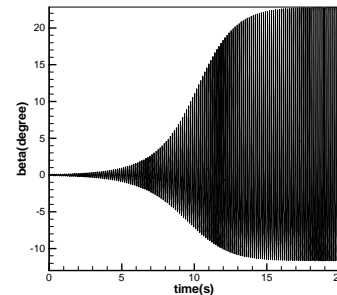
شکل (۱۸): تغییرات α برای سرعت جریان $v_f = 11.5 m/s$ و به ازای $c = -0.05$.

^۱Flutter

^۱Limit Cycle Oscillation (LCO)

Dynamic Response of a Two-degree-of-freedom System and its Application in Aeroelasticity," J. Fluids and Structures, Vol. 11, pp. 225-246, 1997.

6. Theodorsen, T. and Garrick, I.E., "Analysis and Computation of Nonlinear Dynamic Response of a Three-degree-of-freedom System and Its Application in Aeroelasticity," J. Fluids and Structures, Vol. 11, pp. 225-246, 1972



شکل (۲۲): تغییرات β برای سرعت جریان $v_f = 14 m/s$ و به ازای $c = -0.063$.

۷- نتیجه گیری

در حالت خطی، با افزایش مقدار فاصله c ، ناپایداری زودتر اتفاق می افتد. در حالت خطی سرعت $v_f = 13.2 m/s$ آستانه ناپایداری می باشد و با ثابت نگه داشتن مقدار c و افزایش سرعت در حالت خطی خیلی سریع این پدیده اتفاق می افتد.

در حالت غیر خطی با افزایش مقدار فاصله c ، سرعت تشکیل حالت نوسانات با سیکل محدود^۱ کاهش می یابد. همانطور که ملاحظه شد، آثار غیر خطی روی ایجاد و نحوه بروز ناپایداری فلاتر مهم است که باعث کاهش سرعت وقوع ناپایداری می شود. لذا می بایست در مرحله طراحی سازهایی که در معرض ناپایداری آیروالاستیک قرار دارند مدنظر واقع شوند.

مراجع

1. Theodorsen, T., "General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter," NACA Report, No.496, 1968.
2. Dowell, E., and Tang, D., "Non-linear Aeroelasticity and Unsteady Aerodynamic," AIAA. J. Vol. 40, pp.1697-1707, 2002.
3. Dowell, E., Edwards, J., and Strganac, T., "Non-linear Aeroelasticity," Int. J. Aircraft. Vol. 40, pp.857-874, 2003.
4. Hodges, D.H. and Pierce, G.A., "Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity", Cambridge Univ. Press, 2002.
5. Lee, B.H.K. Gong, L., and Wong, Y.S., "Analysis and Computation of Nonlinear

²Limit Cycle Oscillation (LCO)