

تحلیل تنش و نرخ کرنش خزشی مرحله پایدار کامپوزیت‌های با تقویت‌کننده کوتاه به روش تفاضل محدود

مهدی مندعلی^۱

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات،

دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، گروه مهندسی هوافضا

علی عابدیان^۲ و علی قوامی^۳

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا

چکیده

در این نوشتار از روش تفاضل محدود برای حل معادلات تعادل و بنیادی خزش در مدل میکرومکانیک جهت بدست آوردن میدان های تنش و نرخ کرنش خزشی مرحله پایدار کامپوزیت تحت بار کششی استفاده شده است. به منظور مدل‌سازی میکرومکانیک، مدل تقارن محوری تک‌سلول به عنوان مدل هندسی استاندارد انتخاب شده و شرایط مرزی مناسب در سطوح تک‌سلول مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در انتها، پس از بررسی توزیع تنش‌ها در زمینه، نرخ کرنش کامپوزیت بدست آمده از روش حاضر با مقادیر بدست آمده از حل المان محدود و تست‌های آزمایشگاهی با در نظر گرفتن قانون نمایی و توانی برای خزش زمینه مقایسه شده است. مطالعه نتایج بدست آمده کمک زیادی به شناخت نحوه حرکت ماده‌ی زمینه در کامپوزیت و مکانیزم انتقال بار از زمینه به تقویت‌کننده می‌کند.

واژه‌های کلیدی: کامپوزیت با تقویت‌کننده کوتاه، خزش، روش تفاضل محدود

Stress Analysis and Steady State Creep Strain Rate in a Short Fiber Composite, Using Finite Difference Method

Mehdi Mondali, Ali Abedian, and Ali Ghavami

ABSTRACT

A finite difference technique is developed to predict the second stage creep displacement rate and stress analysis of a short fiber composite subjected to a constant axial load through a micromechanical approach. An axisymmetric model is utilized for micromechanical modeling of the composite. The appropriate boundary conditions are applied to the boundaries of the unit cell. Both the exponential and power laws are adopted to describe the matrix creep behavior. Accordingly, the stress distribution in the matrix material is obtained and the predicted creep strain rate by the proposed approach is compared with the experimental and FEM results. This study can help to investigate the flow of the matrix material in composite and stress transfer mechanism from the matrix to the fiber.

^۱ استادیار (نویسنده پاسخگو): m_mondali@yahoo.com

^۲ دانشیار: abedian@sharif.ir

^۳ کارشناس ارشد

۱- مقدمه

گرفت [۱۵]. با وجود اینکه نتایج بدست آمده در برخی از موارد رضایت بخش به نظر می‌رسید، ولی در موارد زیادی نیز اختلافاتی بین نتایج عددی بدست آمده و نتایج آزمایشگاهی وجود داشت. در ادامه‌ی بررسی‌ها بر روی عکسبرداری‌های انجام شده روی نمونه‌های آزمایشگاهی، شواهدی از بروز خرابی در مرز میان زمینه و تقویت‌کننده به صورت گسستگی را نمایان کرد [۱۶] و مدل‌سازی‌های عددی با در نظر گرفتن این خرابی‌ها پیشرفت قابل ملاحظه‌ای را در نتایج بدست آمده نشان داد [۶ و ۱۱].

در این مقاله، از شیوه‌ای بر پایه روش تفاضل محدود برای بدست آوردن تنش و نرخ کرنش خزشی مرحله‌ی پایدار کامپوزیت Al6061-15%SiC استفاده شده است. کامپوزیت تحت بار کششی ثابت و دمای 580 K در نظر گرفته شده و جهت مدل‌سازی مایکرومکانیک، مدل تقارن محوری تک‌سلول به عنوان مدل هندسی استاندارد انتخاب شده و شرایط مرزی مناسب در سطوح تک‌سلول مورد استفاده قرار گرفته است. مدل ارائه شده، با حل دستگاه معادلات کوپل، شامل معادلات تعادل و معادلات ساختاری خزش در حالت تقارن محوری، قادر به تعیین میدان‌های نرخ کرنش خزشی در جهات محوری و شعاعی و تعیین میدان‌های تنش در اطراف تقویت‌کننده می‌باشد.

۲- مدل هندسی و شرایط مرزی حاکم

به منظور حل مسأله به روش عددی، معمولاً سازه به همراه بارگذاری و شرایط فیزیکی حاکم بر آن مدل‌سازی می‌شود. در اینجا مشابه دیگر روش‌ها، فاز تقویت‌کننده به صورت سیلندرها و یا صفحه‌هایی که با نظم خاصی در طول یکدیگر در فاز زمینه قرار گرفته‌اند ایده‌آل‌سازی می‌شود. در این حالت، تغییر شکل کل کامپوزیت می‌تواند با در نظر گرفتن یک تک‌سلول^۴ شامل یک یا چند تقویت‌کننده استوانه‌ای یا صفحه‌ای و زمینه‌ی اطراف آن شبیه‌سازی شود. با توجه به واقعیت بالا، فرض می‌شود که یک تک‌سلول از تقویت‌کننده‌ای استوانه‌ای با طول $2l$ و با شعاع a که درون یک استوانه هم‌محور به طول $2L$ و شعاع b از

کارایی بالای کامپوزیت‌های زمینه فلزی^۱ با تقویت‌کننده‌ی کوتاه در دماهای کاری بالا در کنار چگالی پایین این مواد باعث شده که این دسته از مواد به عنوان یکی از کاندیداهای اصلی در طراحی و ساخت سازه‌های پیشرفته مد نظر قرار گیرند. امروزه مواد مرکب زمینه فلزی به طور وسیعی در صنایع هوافضا، خودروسازی، الکترونیک، لوازم ورزشی و بسیاری موارد دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. استفاده‌ی صحیح از این مواد تنها با شناخت مکانیزم تغییر شکل آنها تحت شرایط مختلف بارگذاری امکان پذیر می‌باشد. از این رو در سال‌های اخیر پیش‌بینی رفتار خزشی این دسته از مواد مورد بررسی بسیاری از محققین و دانشمندان قرار گرفته است و روش‌های جدیدی نیز در همین زمینه توسط آنها ارائه شده است. در کنار روش‌های پرهزینه و زمان‌بر آزمایشگاهی، روش‌های تئوری و عددی متفاوتی نیز در این زمینه ارائه شده که قادرند رفتار خزشی این مواد را با دقت‌های مختلف پیش‌بینی کنند.

در اکثر روش‌های تئوری، مکانیزم انتقال بار از زمینه به تقویت‌کننده به عنوان مبنای اصلی تعیین رفتار خزشی مواد کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته است. در تحقیقات ابتدایی، معمولاً از مدل‌های یک بعدی استفاده شده و مکانیزم انتقال بار با استفاده از تئوری معروف عقب افتادگی برشی^۲ [۲-۷ و ۱۳] توضیح داده می‌شد. در سال‌های بعد، تئوری عقب افتادگی برشی مورد اصلاحاتی قرار گرفت و روش‌های نوینی همچون تکنیک تقویت‌کننده مجازی^۳ [۵ و ۱۴]، با دقت خوبی جهت تعیین میدان‌های تنش در حالت الاستیک مورد استفاده قرار گرفت.

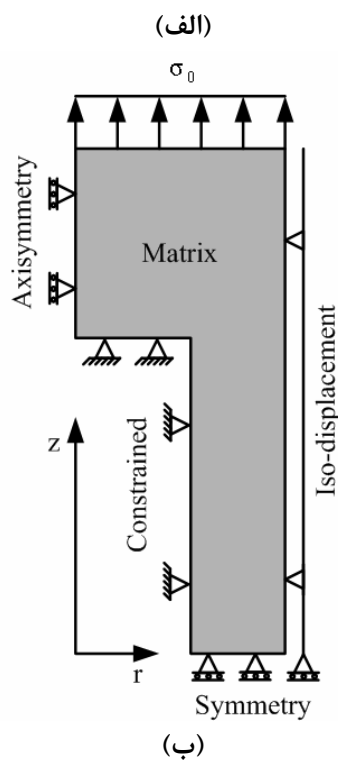
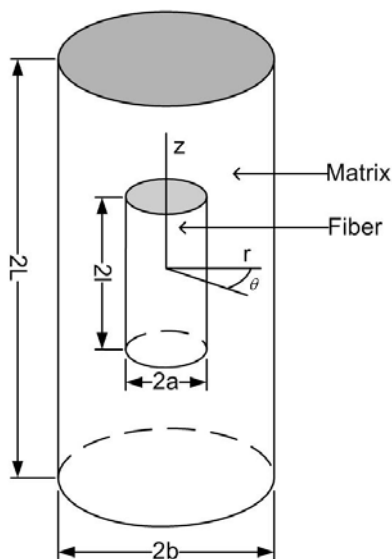
با پیشرفت کامپیوترها و افزایش قدرت محاسباتی آنها در سال‌های اخیر، تمایل به استفاده از روش‌های عددی در میان دانشمندان افزایش یافت. رفتار خزشی و پارامترهای هندسی مؤثر در آن به طور وسیعی توسط روش‌های بر مبنای مکانیک محیط‌های پیوسته و با استفاده از نرم‌افزارهای تجاری المان محدود مورد بررسی قرار

¹ Metal Matrix Composites (MMC)

² Shear Lag Theory

³ Imaginary Fiber Technique

⁴ Unitcell



شکل (۱): الف- مدل تک سلولی استاندارد، ب- مدل ساده شده تک سلول به همراه شرایط مرزی حاکم

۳- روش حل

در این بخش ابتدا معادلات حاکم بر مسئله ارائه شده و سپس با استفاده از روش تفاضل محدود و اعمال شرایط مرزی مطلوب دستگاه معادلات حاکم حل شده است.

جنس زمینه قرار گرفته و هیچ نوع گسستگی بین این دو فاز وجود نداشته باشد. برای سهولت، دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) هم‌مرکز با تقویت‌کننده در بدست آوردن معادلات استفاده شده است. تقارن موجود در هندسه، بارگذاری و جنس مواد این امکان را فراهم می‌آورد که با اعمال شرایط مرزی مناسب، مدل سه بعدی تک سلول به یک مدل تقارن محوری با کاهش چشمگیر محاسبات و در نتیجه زمان حل و حافظه مورد نیاز در حل عددی تبدیل شود. در این مقاله فرض می‌شود که تقویت‌کننده دارای رفتار الاستیک بوده و تنها ماده زمینه وارد فاز خزش شده و تغییرات ابعادی وابسته به زمان پیدا کند. رفتار خزشی زمینه نیز با استفاده از قانون زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\epsilon}_e = A \exp\left(\frac{\sigma_e}{B}\right). \quad (1)$$

این رابطه به عنوان قانون نمایی خزش شناخته می‌شود [۴-۲] که تنش معادل بوده و A و B مقادیر ثابتی می‌باشند.

با توجه به مدل تک سلول در نظر گرفت شده، سطوح بیرونی سلول در تماس با سلول‌های مجاور می‌باشند، بنابراین با توجه به اثر سلول‌های مجاور، سطوح بیرونی باید دارای تغییر مکان و در نتیجه نرخ تغییر مکان یکسان بوده و عاری از هرگونه تنش برشی باشند [۱۵ و ۲۲]. بنابراین داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \alpha \quad u(b, z) = u_b, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \alpha \quad r = b. \quad (2)$$

شرایط مرزی مذکور تضمین می‌کنند که تک سلول پس از تغییر شکل نیز به صورت یک استوانه با سطوح انتهایی صاف باقی مانده و از نظر هندسی با سلول‌های مجاور سازگاری داشته باشد. به منظور شبیه‌سازی تست خزش با تنش ثابت، تنش σ_0 در جهت قرارگیری تقویت‌کننده‌ها بر روی سطح بالایی تک سلول بصورت کششی اعمال شده است. مدل تک سلول استاندارد و ساده شده‌ی آن به همراه شرایط مرزی حاکم در شکل ۱ ارائه شده‌اند.

۱-۳- معادلات حاکم

معادلات تعادل برای یک تک سلول در دستگاه مختصات استوانه‌ای با در نظر گرفتن تقارن محوری و عدم وجود نیروهای بدنی به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0 \\ \text{ب)} \quad & \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \end{aligned} \quad (۳)$$

ترکیب معادلات ساختاری خزش^۱ و روابط نرخ کرنش - نرخ تغییر مکان، منجر به روابط غیر خطی زیر می‌شود که وابستگی نرخ تغییر مکان را به تنش‌های محوری و برشی بیان می‌کند:

$$\begin{aligned} \text{الف-۴)} \quad & \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} - K(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}) = 0 \\ \text{ب-۴)} \quad & \frac{\dot{u}}{r} - K(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - \sigma_{rr}) = 0 \\ \text{پ-۴)} \quad & \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} - K(2\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) = 0 \\ \text{ت-۴)} \quad & \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} - 6K \tau_{rz} = 0 \end{aligned}$$

که در آن σ_{zz} ، σ_{rr} ، $\sigma_{\theta\theta}$ و τ_{rz} تنش‌های اعمالی در جهت‌های مشخص شده و \dot{u} و \dot{w} نرخ تغییر مکان به ترتیب در جهات r و z می‌باشند. عبارت K نیز به صورت $K = \frac{\dot{\epsilon}_e}{2\sigma_e}$ تعریف می‌شود که σ_e تنش معادل

بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + 6\tau_{rz}^2]^{1/2} \quad (۵)$$

۲-۳- روش حل تفاضل محدود

دستگاه معادلات مشتقات جزئی حاکم با اعمال تقریب درجه اول تیلور گسسته‌سازی شده و به فرم ماتریسی بازنویسی می‌شوند. تنها نکته باقی مانده، وجود ترم‌های غیر خطی در معادلات گسسته‌سازی شده می‌باشد. در این بخش، سعی بر آن شده که با اعمال تکنیک مناسب مجموعه‌ی معادلات، خطی و قابل حل شوند. جهت نیل به این هدف، دستگاه معادلات جبری حاصل با استفاده از یک نوع تکنیک

تکراری^۲، خطی‌سازی شده است [۲۳]. به منظور خطی‌سازی معادلات، ابتدا با فرض یک توزیع اولیه برای تنش و نرخ تغییر مکان در کل دامنه حل، ضرایب غیر خطی محاسبه شده و دستگاه معادلات ماتریسی حل می‌شود. در مرحله بعد، مقادیر فرض شده با استفاده از نتایج جدید بدست آمده و بکارگیری تکنیک آندِر-ریلاکسیشن^۳ [۲۳-۲۴] بروز رسانی می‌شوند. دو مرحله‌ی گفته شده آنقدر تکرار می‌شوند تا جواب نهایی بدست آمده به مقادیر واقعی همگرا شود. تکنیک دو مرحله‌ای به کار گرفته شده جهت خطی‌سازی معادلات را می‌توان به صورت ساده شده زیر بیان نمود:

$$X^{n+1} = (1-\omega)X^n + \omega[L(X^n)]^{-1}b, \quad (۶)$$

که در آن،

$$X = [x_1 \dots x_i]^T, \quad 1 \leq i \leq m \quad (۷)$$

و $x_i = [\sigma_{zz} \ \sigma_{rr} \ \sigma_{\theta\theta} \ \tau_{rz} \ \dot{u} \ \dot{w}]_i$ می‌باشد. اندیس i شمارنده‌ی نودهای داخلی شبکه محاسباتی بوده و از ۱ تا مقدار بیشینه m تغییر می‌کند.

تکنیک دو مرحله‌ای به کار گرفته شده آنقدر تکرار می‌شود تا شرط همگرایی زیر را ارضا نماید:

$$\left| \left(\frac{X^{n+1} - X^n}{X^n} \right)_{\max} \right| \leq e \quad (۸)$$

در روابط و معادلات گفته شده، L ماتریس ضرایب با اندازه $6m \times 6m$ است که در بردارنده‌ی مقادیر غیرخطی K بوده و در نتیجه تابعی از X می‌باشد. همچنین، "b" نیز بردار در بردارنده مقادیر مرزی بوده و ω فاکتور آندِر-ریلاکسیشن می‌باشد.

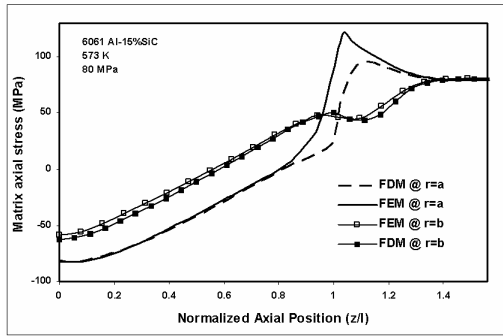
۳-۳- نحوه‌ی محاسبه \dot{u}_b

با توجه به این نکته که نیرو یا تنش‌ی در جهت شعاعی بر سطح بیرونی تک سلول اعمال نشده و تنها تنش محوری σ_0 به آن وارد می‌شود، انتگرال تنش‌های شعاعی بر روی سطح بیرونی می‌بایست برابر صفر باشد بطوری که:

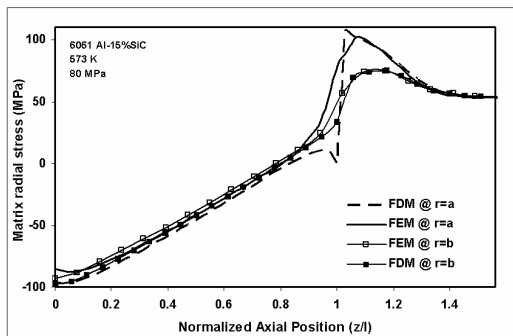
² Iterative

³ Under Relaxation Technique

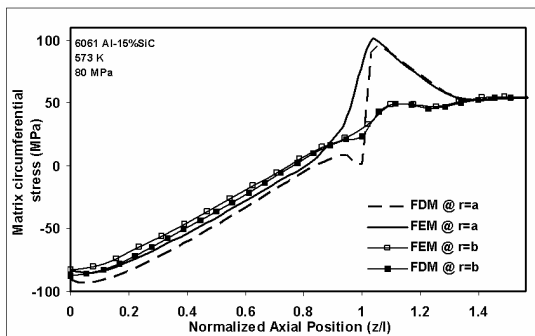
¹ Creep Constitutive Equations



(۲-الف)



(۲-ب)



(۲-ج)

شکل (۲): الف- توزیع تنش محوری ب- توزیع تنش شعاعی، ج- توزیع تنش محیطی.

به منظور ایجاد توزیع یکنواخت \dot{u} روی سطح خارجی تک سلول، تنش‌های شعاعی تقریباً تا انتهای تقویت کننده در $z/l = 1$ شکل فشاری (منفی) و از $z/l = 1$ تا انتهای تک سلول، شکل کششی به خود گرفته است. این رفتار کمابیش در توزیع تنش محوری نیز مشاهده می‌شود. علت این رفتار در تنش محوری را می‌توان با بررسی مکانیزم انتقال بار از زمینه به تقویت کننده توجیه نمود. با حرکت از انتهای تقویت کننده به سمت پایین، به علت اتصال کامل زمینه و تقویت کننده و انتقال بار توسط تنش‌های برشی از

$$\bar{\sigma}_{rb} = \int_0^L \sigma_{rr} dz = 0 \quad (9)$$

رابطه‌ی بالا، معادله‌ی کلیدی مورد نیاز جهت تعیین مقدار \dot{u}_b و حل کامل مسأله‌ی حاضر می‌باشد. با ثابت نگه‌داشتن پارامترهای هندسی و تنش محوری اعمالی، $\bar{\sigma}_{rb}$ تنها تابعی از \dot{u}_b خواهد بود. بنابراین با اعمال روش‌های مناسب تعیین ریشه^۱ به روش تکراری نظیر روش نیوتون-رافسون^۲ یا روش بایسکشن^۳ [۲۳]، می‌توان مقدار \dot{u}_b را با دقت مورد نیاز بدست آورد.

۴- نتایج

کامپوزیت Al 6061-15%SiC به عنوان نمونه جهت بررسی و مقایسه‌ی نتایج روش حاضر با دیگر روش‌های موجود انتخاب شده است. مدل‌سازی المان محدود مسأله با این فرض که فاز تقویت کننده فقط دارای رفتار الاستیک باشد انجام گرفته و شرایط مرزی اعمال شده نیز دقیقاً همانند شرایط مرزی مورد استفاده در حل تفاضلات محدود انتخاب شده‌اند. مدل المان محدود مذکور، با المان‌های دوبعدی هشت-گره‌ای PLANE 183 در حالت تقارن محوری در نرم‌افزار ANSYS مش‌بندی و حل شده است. همچنین، ثابت‌های مورد اشاره در رابطه‌ی (۱) نیز به صورت $A = \exp(-24.7)$ و $B = 6.47$ تعریف شده‌اند [۱۱].

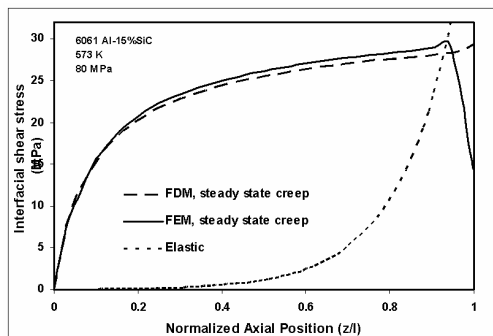
۴-۱- مطالعه‌ی میدان‌های تنش

شکل‌های ۲-الف تا ۲-پ به ترتیب تنش‌های محوری، شعاعی و محیطی حاصل از حل تفاضلات محدود و المان محدود را نشان می‌دهد. جهت بررسی بهتر مسأله، این مقایسه در دو محل، یکی در سطح خارجی تک سلول ($r = b$) و دیگری در مرز بین دو فاز ($r = a$) انجام گرفته است. همانطور که در شکل‌ها مشخص است، سازگاری بسیار خوبی بین نتایج تفاضلات محدود و نتایج المان محدود مشاهده می‌شود.

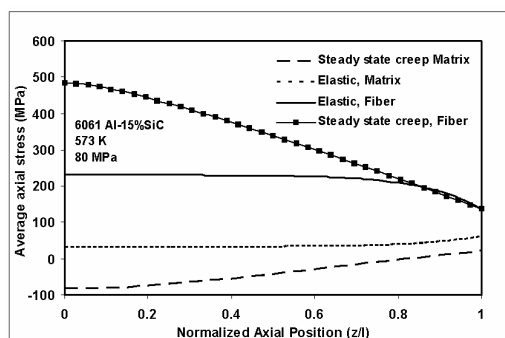
¹ Root-finding Method

² Newton-Raphson

³ Bisection Method



(۳-الف)



(۳-ب)

شکل (۳): الف- مقایسه تنش محوری در زمینه و تقویت کننده در حالت الاستیک و خزش، ب- توزیع تنش برشی در مرز زمینه و تقویت کننده در حالت الاستیک و خزش

همان طور که در شکل مشخص است، در حالت الاستیک تنش برشی تقریباً در نیمی از طول تقویت کننده برابر صفر است و پس از آن به صورت نمایی افزایش پیدا می کند. این در حالی است که در حالت خزش، تنش برشی از $z = 0$ به سرعت به صورت لگاریتمی افزایش پیدا کرده و تا انتها تقریباً ثابت می ماند. این تغییر ماهیت توزیع تنش های برشی باعث می شود که سطح زیر نمودار تنش برشی در حالت خزش مرحله ی پایدار بیشتر از حالت الاستیک شده و در نتیجه مقدار بار انتقال یافته به تقویت کننده نیز در حالت خزش افزایش یابد.

۴-۳- مطالعه میدان های نرخ تغییر مکان و نرخ کرنش

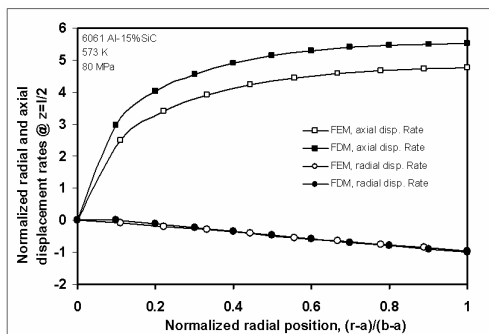
کامپوزیت

حل مستقیم نرخ تغییر مکان های شعاعی و محوری یکی از برتری های مهم روش تفاضلات محدود نسبت به روش المان

زمینه به سطح تقویت کننده، تنش کششی در تقویت کننده افزایش می یابد. با توجه به شرط تعادل نیروها در مقطع تک سلول، این افزایش تنش کششی در تقویت کننده باعث شکل گیری تنش های محوری فشاری در زمینه می گردد. نتایج حل FDM همانند حل المان محدود، وجود مقادیر بزرگ تنش در انتهای تقویت کننده را آشکار می سازد. این تمرکز تنش که به علت وجود گوشه تیز تقویت کننده در (a, l) بوجود می آید، باعث لغزش زمینه روی تقویت کننده و یا در حالات بحرانی تر باعث جدایش دو فاز می گردد.

۴-۲- مکانیزم انتقال بار از زمینه به تقویت کننده

بررسی توزیع تنش محوری در مرز بین تقویت کننده و زمینه در حالت الاستیک و خزش باعث می شود تا شناخت بهتری از مکانیزم انتقال بار بین این دو فاز بدست آید. در حالت الاستیک، بخش زیادی از بار اعمالی به کامپوزیت به علت بزرگی مدول الاستیک تقویت کننده نسبت به زمینه، توسط تقویت کننده تحمل می شود. با وجود این در حالت خزش، به علت فرض چسبندگی کامل زمینه و تقویت کننده و با توجه به خزش ماده ی زمینه در مجاورت تقویت کننده، تقویت کننده سهم بسیار بیشتری از بار را در مقایسه با حالت الاستیک تحمل می کند. همانطور که در شکل ۳-الف مشاهده می شود، مقدار تنش محوری که در مرکز تقویت کننده ($z = 0$) به حداکثر خود می رسد، در حالت خزش بیشتر از دو برابر حالت الاستیک می باشد. این پدیده به همراه شرط تعادل محوری در مقطع تک سلول باعث تولید تنش های محوری فشاری در ماده زمینه مجاور تقویت کننده در حالت خزش می شود. انتقال بار از زمینه به تقویت کننده در سطح جانبی ($r = a$) از طریق تنش برشی ایجاد شده در مرز تماس دو فاز صورت می پذیرد. بنابراین، توزیع تنش های محوری در مرز دو فاز در حالات الاستیک و خزش مرحله ی پایدار توسط توزیع تنش برشی تعیین می گردد. شکل ۳-ب توزیع تنش های برشی در حالات الاستیک و خزش مرحله ی پایدار را نشان می دهد.



شکل (۴-ب):

شکل (۴): الف- توزیع نرخ تغییر مکان محوری و شعاعی در زمینه ب- مقایسه نرخ کرنش کامپوزیت بدست آمده با روش المان محدود و داده‌های تجربی.

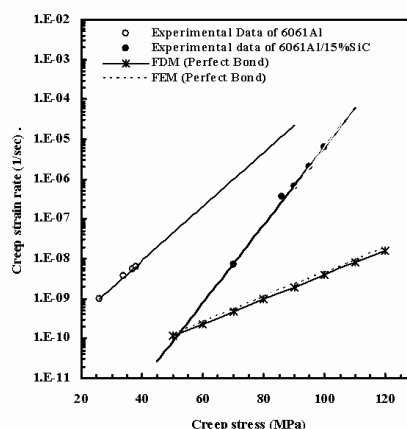
همانطور که ملاحظه می‌شود، مدل‌های عددی و تحلیلی موجود، قادر به ارائه‌ی تخمین صحیحی از نرخ خزش کامپوزیت 6061-15%SiCw نمی‌باشند. دلیل این امر را می‌توان به شکل‌گیری و ایجاد حفره‌ها در ماده‌ی زمینه در هنگام ساخت، گسستگی و جدایش دو فاز زمینه و تقویت‌کننده، حتی در تنش‌های پایین و عدم هم‌جهت و موازی بودن تقویت‌کننده‌ها به صورتی که در مدل‌های موجود در نظر گرفته شده و نواقصی که در هنگام ساخت کامپوزیت پیش می‌آیند نسبت داد.

۵- نتیجه‌گیری

روش تفاضل محدود ارائه شده در این مقاله قادر است رفتار خزشی کامپوزیت‌های زمینه فلزی با تقویت‌کننده‌ی کوتاه را تحت بار کششی و شرایط مرزی مشخص به خوبی پیش‌بینی کند. بعلاوه، میدان‌های تنش و نرخ تغییر مکان بدست آمده هماهنگی خوبی با مدل‌سازی‌های المان محدود داشته و معادلات تعادل و معادلات ساختاری خزش را ارضا می‌کنند. همچنین، بررسی‌های انجام شده با فرض اتصال کامل زمینه و تقویت‌کننده، نشان می‌دهد که وجود مقادیر بالای تمرکز تنش در انتهای تقویت‌کننده باعث گسستگی دو فاز و کاهش کارایی خزشی کامپوزیت می‌شود.

محدود می‌باشد. مقادیر نرمال شده‌ی \dot{u} و \dot{w} در $a \leq r \leq b$ و $z = l/2$ برای هر دو روش تفاضلات محدود و المان محدود در شکل ۴-الف نشان داده شده است.

همانطور که در شکل مشخص است، سازگاری خوبی بین نتایج بدست آمده و نتایج المان محدود وجود دارد. مقدار \dot{u} از صفر در مرز زمینه و تقویت‌کننده به صورت خطی تا مقدار نهایی در سطح بیرونی تک‌سلول، یعنی \dot{u}_b تغییر می‌کند در حالی که مقادیر \dot{w} از صفر در مرز بین دو فاز با شیب زیادی افزایش پیدا کرده و رفته رفته با نزدیک شدن به سطح بیرونی در $r = b$ مقدار آن ثابت می‌شود. البته فرض رفتار الاستیک برای ماده‌ی تقویت‌کننده در حل المان محدود می‌تواند عامل اختلاف بوجود آمده بین مقادیر \dot{w} بدست آمده از حل تفاضل محدود و المان محدود باشد. میزان نرخ کرنش کامپوزیت بدست آمده از مدل‌های تفاضلات محدود، تئوری و المان محدود در شکل ۴-ب نتایج آزمایشگاهی [۱۱] مقایسه شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود، سازگاری بسیار خوبی بین نتایج روش تفاضلات محدود با دیگر روش‌های عددی و تئوری مشاهده می‌شود که این امر با توجه به سازگاری میدان‌های نرخ کرنش بدست آمده که در بخش قبل مورد مطالعه قرار گرفت، دور از انتظار نمی‌باشد.



شکل (۴-الف):

مراجع

- Matrix", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 32, No. 10, pp. 801-815, 1990.
14. Hsueh, C.H., "Interfacial Debonding and Fiber Pull-out Stresses of Fiber-reinforced Composites", *Mater. Sci. Eng.*, Vol. 123, pp. 1-11, 1990.
 15. Dragon, T.L. and Nix, W.D., "Geometric Factors Affecting the Internal Stress Distribution and High Temperature Creep Rate of Discontinuous Fiber Reinforced Metals", *Acta. Metall. Mater.*, Vol. 38, pp. 1941-1953, 1990.
 16. Nieh, T.G., "Creep Rupture of a Silicon-Carbide Reinforced Aluminum Composite", *Metall. Trans.*, Vol. A15, No. 1, pp. 139-146, 1984.
 17. Lilholt, H. and Taya, M., "Creep of SiC Whisker/2124 Aluminum Composite", In: Matthews FL, Buskell NC, Hodgkinson JM, Morton J, Editors. ICCM-VI/ECCM-II, Vol. 2, 1987.
 18. Hsueh, C.H., "Interfacial Debonding and Fiber Pullout Stresses of Fiber-reinforced Composites Part VII: Improved Analysis for Bonded Interfaces", *Mater. Sci. Eng.*, Vol. A154, pp.125-132, 1992.
 19. Hsueh, C.H., "A Modified Analysis for Stress Transfer in Fiber-reinforced Composites with Bonded Fiber Ends", *J. Mater. Sci.*, Vol. 30, No. 1, pp. 219-224, 1995.
 20. Hsueh, C.H. and Becher, P.F., "Residual Thermal Stresses in Ceramic Composites, Part II: with Short Fibers", *Mater. Sci. Eng.*, Vol. A 212, pp.22-28, 1996.
 21. Hsueh, C.H., Young, R.J., Yang, X., and Becher, P.F., "Stress Transfer in a Model Composite Containing a Single Embedded Fiber", *Acta Mater.*, Vol. 45, No. 4, pp. 1469-1476, 1997.
 22. Jiang, Z., Liu, X., Li, G., and Lian, J., "A New Analytical Model for Three-dimensional Elastic Stress Field Distribution in Short Fibre Composite", *Mater. Sci. Eng.*, Vol. A336, pp. 381-396, 2004.
 23. Hoffman, J.D., "Numerical Methods for Scientists and Engineers", McGraw-Hill, New York 1992.
 24. Ames, W.F., "Non-linear Partial Differential Equations", 2nd Ed., Academic Press Inc., New York, 1977.
 1. Hsueh, C.H., "Young's Modulus of Unidirectional Discontinuous-fibre Composites", *Compos. Science. Tech.*, Vol. 60, : No. 14, pp. 2671-2680, 2000.
 2. Lilholt, H., "Creep of Fibrous Composite Materials", *Composite. Science. Tech. Vol.22 (1985) 277-294.1965.*
 3. Mileiko, S.T., "Oxide-fiber/Ni-based Matrix composites-III: A Creep Model and Analysis of Experimental Data", *Compos. Science. Tech.*, Vol. 62, No. 1, pp. 195-204, 2002.
 4. Tjong, S.C. and Ma, Z.Y., "The High Temperature Creep Behaviour of 2124 Aluminum Alloys with and without Particulate and SiC-whisker reinforcement", *composites. Science. Tech.*, Vol.59, pp.737-747, 1999.
 5. Abedian, A., Mondali, M., and Pahlavanpour, M., "Basic Modifications in 3D Micromechanical Modeling of Short Fiber Composites with Bonded and Debonded Fiber End", *Comput. Mater. Science.*, Vol. 40, pp. 421-433, 2007.
 6. Mondali, M., Abedian, A., and Adibnazari, S., "FEM Study of the Second Stage Creep Behavior of Al6061/SiC Metal Matrix Composites", *Comput. Mater. Sci.*, Vol. 34, pp. 140-150, 2005.
 7. Kelly, A. and Street, K.N., "Creep of Discontinuous Fiber Composites. II. Theory for the Steady-state", *Proc. of the Royal Society of London. Series A*, pp.283-293, 1972.
 8. McLean, D., "Viscous Flow of Aligned Composites", *J. Mater. Science.*, Vol.7, No. 1, pp. 98-104, 1972.
 9. McLean, M., "Creep Deformation of Metal-matrix Composites", *Composites. Sci. Technol.*, Vol. 23, No. 1, pp. 37-52, 1985.
 10. Mileiko, S.T., "Steady state creep of a Composite with Short Fibres", *J. Mat. Science.*, Vol. 5, pp. 254-261, 1970.
 11. Morimoto, T., Yamaoka, T., Lilholt, H. and Taya, M., "Second Stage Creep of Silicon Carbide Whisker/6061 Aluminum composite at 573 K", *J. Eng. Mater. Tech.*, Vol. 110, pp. 70-76, 1988.
 12. Wang, Y.R. and Chou, T.W., "Analytical Modeling of Creep of Short Fiber Reinforced Ceramic Matrix Composite", *J. Composite. Mater.*, Vol. 26, pp. 1269-1286, 1992.
 13. Lee, Y.S. and Batt, T.J., and Liaw, P.K., "Stress Analysis of a Composite Material with Short Elastic Fibre in Power Law Creep